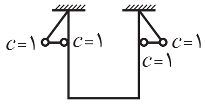
آزمون اول

۱- (۳)

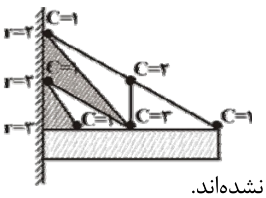
ابتدا کابل‌ها را از سازه حذف می‌کنیم و در انتها دو درجه به درجه نامعینی اضافه می‌کنیم. بنابراین داریم:



$$n = ۳k + r - (c + ۳) = ۳ \times ۲ + ۶ - (۴ + ۳) + ۲ = ۷$$

۲- (۱)

روش اول: از روش فضای بسته $\mathbf{K}$، می‌توان درجه نامعینی سازه را تعیین کرد:

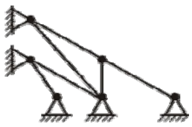


$$\mathbf{n = ۳K + r - (C + ۳) = ۳ \times ۳ + ۷ - (۹ + ۳) = ۴}$$

⇦ **تذکر:** توجه شود که فضاهای هاشورخورده، جزء فضاهای بسته به حساب نمی‌آیند. زیرا توسط اعضای سازه بسته نشده‌اند.

روش دوم:

می‌توان درجه نامعینی تیر و قسمت خرپایی را به‌طور جداگانه حساب کرد. اگر قسمت خرپایی را به طور جداگانه در نظر بگیریم، تمام گره‌های متصل به تیر و تکیه‌گاه گیردار، به تکیه‌گاه مفصلی تبدیل خواهند شد:



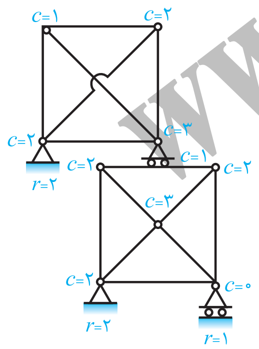
خرپا: $\mathbf{n_۱ = m + r - ۲j = ۶ + ۱۰ - ۲ \times ۶ = ۴}$

تیر: $\mathbf{n_۲ = r - (C + ۳) = ۳ - (۰ + ۳) = ۰}$

$\mathbf{n_{\text{کل}} = n_۱ + n_۲ = ۴ + ۰ = ۴}$

۳- (۴)

تعداد معادلات شرط و کادر بسته را شمارش می‌کنیم. توجه داشته باشید به دلیل اینکه اعضای قطری سازه فوقانی از روی هم عبور کرده‌اند بعد از شمردن کادر بسته یک واحد از آن کم می‌کنیم. همچنین فنرهای دورانی را از سازه حذف کرده و در انتها دو درجه به درجه نامعینی اضافه می‌کنیم.

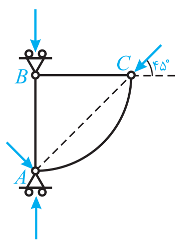


$$\begin{cases} r = ۵ \\ c = ۱۸ \\ k = ۸ - ۱ = ۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ n = ۳k + r - (c + ۳) + \underbrace{\boxed{۲}}_{\text{فنر پیچشی}} = ۳ \times ۷ + ۵ - (۱۸ + ۳) + \underbrace{\boxed{۲}}_{\text{فنر پیچشی}} = ۵ + \overbrace{\boxed{۲}}^{\text{فنر پیچشی}} = ۷$$

توجه داشته باشید که در تکیه‌گاه سمت راست سازهٔ زیرین، اعضا قبل از رسیدن به مفصل به هم متصل شده‌اند و در این نقطه معادله شرط نخواهیم داشت.

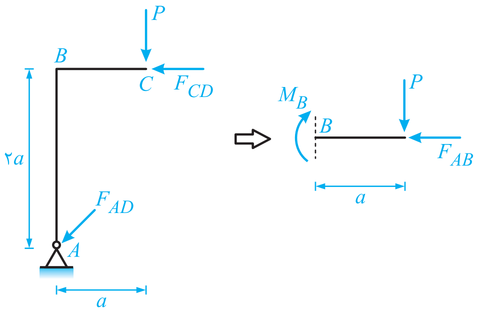
۴- (۱)



با اندکی دقت در سازه و با بیرون آوردن قطعه ABC مطابق شکل مشاهده خواهید کرد که قیودی که این قسمت را به سازهٔ اصلی متصل می‌کند در نقطه A همرس هستند و در نتیجه این قطعه ناپایدار است. بنابراین سازه نیز ناپایدار خواهد بود.

۵- (۳)

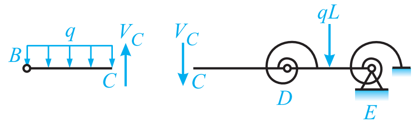
با کمی دقت ملاحظه می‌شود که اعضای AD و CD اعضای دوسر مفصل مستقیم و فاقد بارگذاری می‌باشند و در نتیجه نیروی آن‌ها به صورت محوری است. با جداسازی قطعه ABC ترسیمهٔ آزاد نیروهای داخلی به صورت زیر خواهد بود:



$$\Rightarrow \sum M_B = ۰ \Rightarrow M_B + P \times a = ۰ \Rightarrow M_B = -Pa$$

۶- (۲)

با توجه به اینکه سازه موردنظر معین است می‌توانیم با استفاده از معادلات تعادل، مقدار لنگر خمشی در محل هر یک از فنرهای E و D را محاسبه کنیم. بنابراین با استفاده از معادلات تعادل خواهیم داشت:



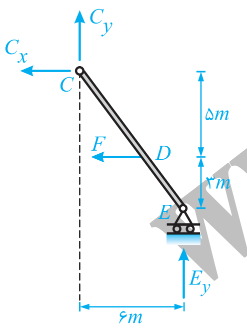
$$BC \text{ تعادل} : \sum M_B = ۰ \Rightarrow q \times L \times \frac{L}{۲} - V_C \times L = ۰ \Rightarrow V_C = \frac{qL}{۲} \uparrow$$

$$CD \text{ تعادل} : \sum M_D = ۰ \Rightarrow M_D - \frac{qL}{۲} \times L = ۰ \Rightarrow M_D = \frac{qL^۲}{۲}$$

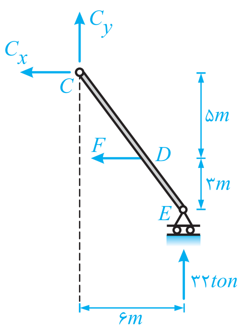
$$CDE \text{ تعادل} : \sum M_E = ۰ \Rightarrow M_E - \frac{qL}{۲} \times ۲L - qL \times \frac{L}{۲} = ۰ \Rightarrow M_E = \frac{۳}{۲} qL^۲$$

۷- (۳)

با اندکی دقت می‌توان دریافت که قاب مورد نظر معین است و دارای سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی می‌باشد. برای به دست آوردن نیروی داخلی ایجاد شده در فنر باید قاب را از محل مفصل C و اتصال فنر در نقطه D جدا کنیم.



همانطور که مشاهده می‌کنید در قطعه جدا شدهٔ CDE چهار نیروی مجهول $(E_y \ , \ F \ , \ C_y \ , \ C_x)$ وجود دارد و این قطعه قابل تحلیل نمی‌باشد. بنابراین ابتدا با بررسی تعادل کل سازه مقدار Ey را بدست می‌آوریم:



$$\text{تعادل کل سازه} : \sum M_A = ۰ \Rightarrow ۱۲ \times ۸ \times \frac{۸}{۲} - E_y \times ۱۲ = ۰ \Rightarrow E_y = ۳۲ton$$

اکنون قطعه CDE سه مجهولی شده و داریم:

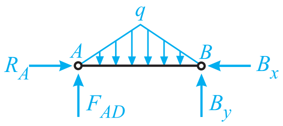
$$CDE \text{ تعادل قطعه} : \sum M_C = ۰ \Rightarrow F \times ۵ - ۳۲ \times ۶ = ۰ \Rightarrow F = ۳۸/۴ton$$

در نهایت تغییر طول فنر برابر است با:

$$\Delta = \frac{F}{k} = \frac{۳۸/۴ton}{۲۰ton/cm} = ۱/۹۲cm \text{ افزایش طول}$$

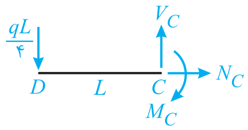
۸- (۲)

عضو AD دو سر مفصل، مستقیم و فاقد بارگذاری است بنابراین خرپایی محسوب می‌شود و نیروی آن برابر است با:



$$\sum M_B=۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times q\times L\times\frac{L}{۲}-F_{AD}\times L=۰ \Rightarrow F_{AD}=\frac{qL}{۴}$$

با در نظر گرفتن تعادل عضو DC داریم:



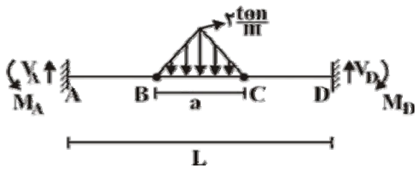
$$\sum M_C=۰ \Rightarrow \frac{qL}{۴}\times L-M_C=۰ \Rightarrow M_C=\frac{qL^۲}{۴}$$

۹- (۲)

اعضای EF و GF دوسر مفصل بوده و هیچ گونه نیروی برشی را تحمل نمی‌کنند. لذا تمام نیروی $P=۲\,ton$ از طریق عضو CF منتقل می‌شود. عضو CD نیز دو سر مفصل می‌باشد و بنابراین کل بار P به عضو BC می‌رسد (چرا؟) و داریم:

$$M_{B(\text{از } BC)}=۲\times۲=۴\,ton.m$$

۱۰- (۲)

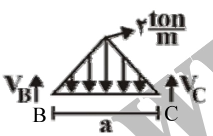


در قطعات **AB**، **BC** و **CD** در شکل مقابل، حداکثر لنگر خمشی به ترتیب در **A**، وسط **BC** و **D** اتفاق می‌افتد. برای حداقل شدن لنگر خمشی ماکزیمم در این تیر، باید لنگر خمشی در **A** و **D** با لنگر خمشی در وسط **BC** برابر شود. (توجه شود به‌دلیل تقارن، $M_A=M_D$ می‌باشد)

$$\begin{cases} \text{با توجه به تقارن}: V_A=V_D \\ \sum F_y=۰\Rightarrow V_A+V_D=\frac{۱}{۲}\times a\times ۲=a \end{cases} \Rightarrow V_A=V_D=\frac{a}{۲}$$

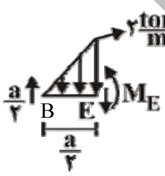
$$\sum M_{B_L}=۰\to M_A=V_A\times(\frac{L-a}{۲})\Rightarrow M_A=\frac{a}{۲}(\frac{L-a}{۲})$$

برای یافتن لنگر در وسط **BC**، این قطعه را جداگانه بررسی می‌کنیم (E وسط BC است):



$$\begin{cases} \text{با توجه به تقارن}: V_B=V_C \\ \sum F_y=۰\Rightarrow V_B+V_C=\frac{۱}{۲}\times a\times ۲=a \end{cases} \Rightarrow V_B=V_C=\frac{a}{۲}$$

لذا داریم:

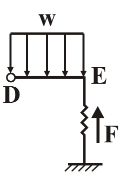


$$\sum M_E=۰\Rightarrow M_E+(\frac{۱}{۲}\times۲\times\frac{a}{۲})\times(\frac{۱}{۳}\times\frac{a}{۲})=\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲}\Rightarrow M_E=\frac{a^۲}{۶}$$

$$\text{برای حداقل شدن لنگر ماکزیمم}: M_E=M_A\Rightarrow\frac{a^۲}{۶}=\frac{a}{۲}(\frac{L-a}{۲})\Rightarrow a=\frac{۳L}{۵}$$

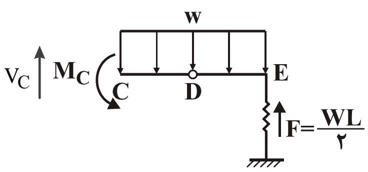
۱۱- (۲)

سازه یک درجه نامعین است اما قسمت **CDE** معین است و با استفاده از معادلات تعادل می‌توان لنگر خمشی در C را به دست آورد. ابتدا قطعه DE را جدا کرده و داریم:



$$\sum M_D=۰ \Rightarrow W\times L\times\frac{L}{۲}=F\times L \Rightarrow F=\frac{WL}{۲}$$

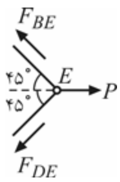
سپس با نوشتن تعادل قطعه CDE خواهیم داشت:



$$\circlearrowleft^{+}\sum M_C=۰ \Rightarrow -M_C+W\times۲L\times L-\frac{WL}{۲}\times۲L=۰$$

$$\Rightarrow M_C=-WL^۲$$

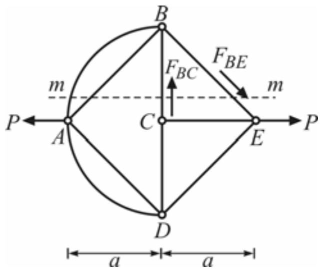
۱۲-(۱)



از بررسی گره C ، $F_{CE}=0$ بدست می‌آید. حال گرهٔ E را در نظر گرفته، F_{BE} را می‌یابیم:

$$\begin{cases}\sum F_y=0 \Rightarrow F_{BE}=F_{DE}\\ \sum F_x=0 \Rightarrow (F_{BE}+F_{DE})\dfrac{\sqrt{2}}{2}=P\end{cases} \Rightarrow F_{BE}=\frac{P\sqrt{2}}{2}$$

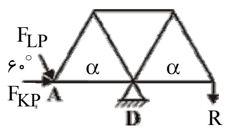
اکنون مقطع $m-m$ را درنظر گرفته و $\sum M_A=0$ را برای قسمت بالای این مقطع می‌نویسیم:



$$\sum M_A=0 \Rightarrow F_{BC}\times a=F_{BE}\times a\sqrt{2} \Rightarrow F_{BC}=\sqrt{2}\times\frac{P\sqrt{2}}{2}=P$$

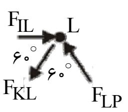
۱۳-(۳)

ابتدا قسمت سمت راست مفصل میانی **A** را در نظر می‌گیریم. توجه شود که چه بارهایی از قسمت چپ این مفصل به قسمت راست مفصل وارد می‌شوند.



$$\sum M_D=0 \rightarrow Ra=F_{LP}\cos 30^\circ\times a \rightarrow F_{LP}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R \qquad (1)$$

اکنون گره L را بررسی می‌کنیم:

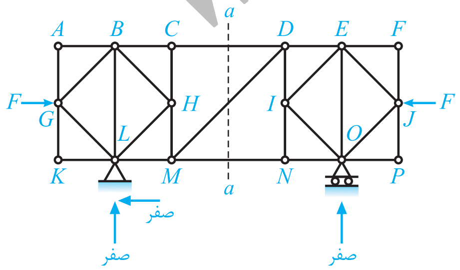


$$\sum F_y=0 \rightarrow F_{KL}=F_{LP} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \rightarrow F_{KL}=\frac{2}{\sqrt{3}}R$$

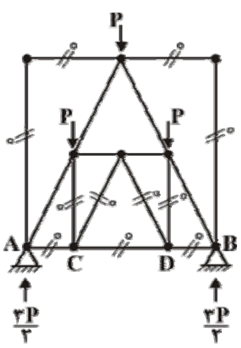
۱۴-(۴)

طبق نکته (۱) بیان شده در درسنامه و با بررسی معادلات تعادل در گره‌های A، F، P و K می‌توان نتیجه گرفت اعضاء AB، AG، FE، FJ، PJ، PO، KL و KG صفر نیرویی می‌باشند. از طرفی با توجه به معادلات تعادل، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها در این خرپا برابر صفر است. با توجه به این موضوع با زدن مقطع $a-a$ در شکل زیر و بررسی تعادل در راستای قائم برای قطعهٔ سمت راست مقطع، نیروی محوری عضو DM برابر صفر به‌دست می‌آید. در این صورت طبق نکته (۲) درسنامه و با بررسی معادلات تعادل روی گره‌های C، M، D و N نیروی اعضای CH، MH، DI و NI نیز صفر خواهد بود. با صفر شدن نیروی این اعضا، مفاصل H و I شامل شرایط بیان شده در نکته (۱) درسنامه شده و در نتیجه نیروی اعضای HB، HL، IE و IO نیز صفر خواهد شد. بنابراین در این سازه با توجه به نوع بارگذاری وارده در مجموع ۱۷ عضو صفر نیرویی وجود دارد.



۱۵-(۴)

نکته: دریک خرپای متقارن که تحت بارگذاری متقارن قرار دارد، اعضای مایلی روی محور تقارن که باری به گره محل تقارب آنها وارد نشده باشد، صفر نیرویی‌اند.



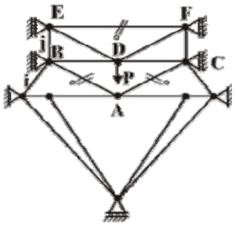
با توجه به نکته فوق و سایر نکات ذکر شده، اعضای مشخص شده روی شکل صفر نیرویی‌اند.

توجه کنید چون در قطعهٔ $ACDB$ نقاط A و B نسبت به هم جابه‌جا نمی‌شوند خواهیم داشت:

$$\Delta_{AB}=0 \Rightarrow F_{AC}=F_{CD}=F_{DB}=0$$

بنابراین، خرپای داده شده، **۱۱** عضو صفر نیرویی دارد.

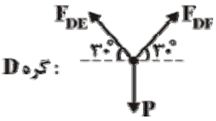
۱۶-(۳)



با توجه به تقارن شکل، عضوهای **AB** و **AC** (باتوجه به نکته ذکرشده در تست ۱۸ از همین فصل) صفر نیرویی خواهند بود. همچنین عضو **EF** تغییرطول نمی‌دهد و صفر نیرویی است.

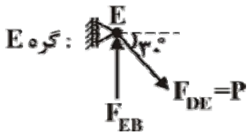
اکنون با استفاده از تعادل نیروها در گره‌های **D**، **E** و **B**، نیروی اعضای **i** و **j** قابل تعیین است. این گره‌ها را در شکل‌های زیر بررسی می‌کنیم:

در گره D:



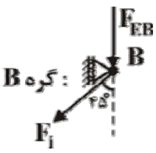
$$\begin{cases} \text{با توجه به تقارن}: F_{DE} = F_{DF} \\ \sum F_y = ۰ \Rightarrow P = (F_{DE} + F_{DF}) \sin ۳۰^\circ \end{cases} \Rightarrow F_{DE} = F_{DF} = P$$

در گره E:



$$\text{(فشاری)} \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_j = F_{EB} = F_{DE} \times \sin ۳۰^\circ = \frac{P}{۲} \Rightarrow F_j = \frac{P}{۲}$$

در گره B:

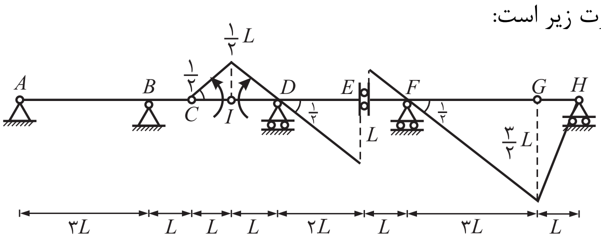


$$\text{(فشاری)} \sum F_y = ۰ \Rightarrow -F_{EB} - F_i \frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۰ \Rightarrow F_i = \frac{-P\sqrt{۲}}{۲}$$

آزمون دوم

۱- (۳)

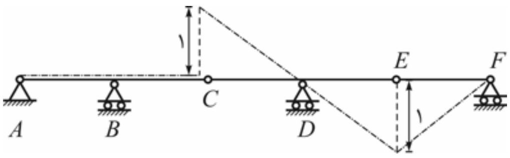
با حذف قید لنگر در I، خط تأثیر لنگر I با توجه به روش مولر - برسلاو به‌صورت زیر است:



بنابراین ارتفاع خط تأثیر لنگر I در G، برابر $-\frac{3}{2}L$ است.

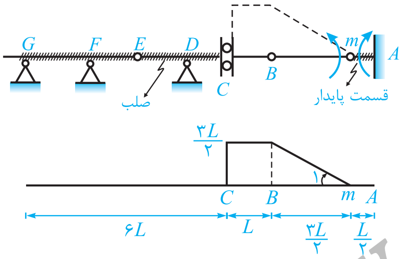
۲- (۳)

خط تأثیر برش در C به صورت زیر است. ملاحظه می‌شود که ارتفاع آن در E، برابر واحد است.



۳- (۱)

برای رسم خط تأثیر با استفاده از روش مولر- برسلاو، ابتدا نقطهٔ m (به فاصله $\frac{L}{2}$ از تکیه‌گاه گیردار) را به مفصل خمشی تبدیل نموده، سپس یک دوران واحد به این نقطه اعمال می‌کنیم. حال شکل تغییر یافتهٔ تیر، همان خط تأثیر لنگر خمشی در نقطهٔ m است. نکاتی که در رسم خط تأثیر فوق در نظر گرفته شده عبارتند از:



۱) سازه معین است. بنابراین کلیهٔ قسمت‌های خط تأثیر به صورت خطی خواهند بود.

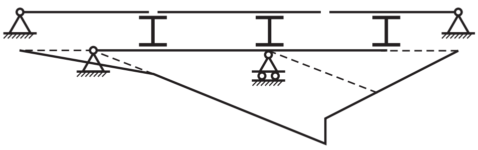
۲) قسمت پیوسته Am به وسیله عکس‌العمل‌های مناسب به زمین وصل شده و پایدار است بنابراین طبق نکات بیان شده، تغییرشکلی نخواهد داشت و همه تغییرشکل به قسمت‌های دیگر خواهد رسید. این موضوع در مورد ناحیه $GFEDC$ نیز برقرار است و در این نقاط نیز تغییرشکلی وجود ندارد.

۳) شیب خط تأثیر در طرفین مفصل برشی باید یکسان باشد. (گره C)

در نهایت با توجه به شکل منحنی خط تأثیر ارتفاع نقاط B و C و E به‌ترتیب برابر $\frac{3}{2}L$ و $\frac{3}{2}L$ و صفر می‌باشد.

۴- (۳)

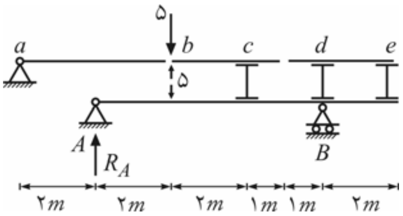
ابتدا خط تأثیر برش سمت چپ نقطه B را رسم کرده و سپس با استفاده از نکات بیان شده در بخش رسم خط تأثیر تیرهای پانل‌دار خواهیم داشت:



بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

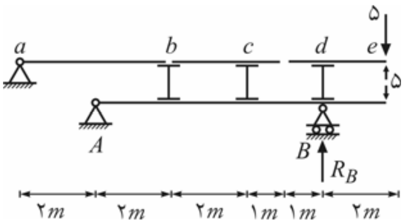
۵- (۴)

واضح است که برای حداکثر شدن R_A، بیشترین بار منتقل شده از طریق تیرهای فرعی، باید در نزدیکی این تکیه‌گاه وارد شود. بنابراین بـار $۵\,ton$ باید در نقطه b اعمال شود که در این حالت R_A برابر است با:



$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_A \times ۶ = ۵ \times ۴ \Rightarrow R_{A_{max}} = \frac{۱۰}{۳}\,ton$$

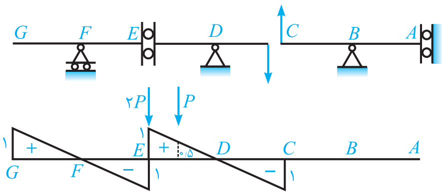
همچنین برای حداکثر شدن R_B، باید بار منتقل شده از طریق تیرهای فرعی، در نزدیکی این تکیه‌گاه، بیشترین مقدار را داشته باشد. به علـت اثر تشدیدکنندگی قسمت کنسول (de) بار $۵\,ton$ را روی e قرار داده، داریم:



$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow R_B \times ۶ = ۵ \times ۸ \Rightarrow R_{B_{max}} = \frac{۲۰}{۳}\,ton$$

۶- (۴)

ابتدا خط تأثیر برش در محل مفصل خمشی C را رسم کنیم. بنابراین تیـر را از محـل C جـدا کرده و تغییر مکان واحد را در دو طرف نقطهٔ C اعمال کنیم. همچنین در مورد فنـر پیچـشی نقطهٔ D با توجه به جدول بیان شده جایگزین آن را قرار می‌دهیم.



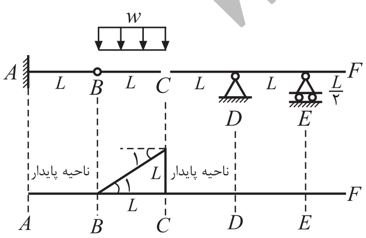
در نهایت با قرار گیری بارهای P در موقعیت نشان داده شده ارتفاع متناظر آنها بیشترین مقدار را خواهد داشت. بنابراین داریم:

$$(V_{max})_c = Max(\sum p_i h_i) = ۲p \times ۱ + p \times ۰/۵ = \frac{۵p}{۲}$$

۷- (۱)

با استفاده از روش مولر - برسلاو، ابتدا یک مفصل خمشی فرضی در محل مفصل برشی C قرار می‌دهیم (بنابراین تیر در این نقطه به صورت انتهای سر آزاد عمل می‌کند.) سپس یک دوران واحد در نقطهٔ C اعمال می‌کنیم. شکل تغییر یافتهٔ تیر، همان خط تأثیر لنگر خمشی در مفصل برشی C می‌باشد.

$$(M_C)_{max} = w \times A = w \times (\frac{۱}{۲} \times L \times L) = \frac{wL^۲}{۲}$$



نکاتی که در حل این تست لحاظ شد:

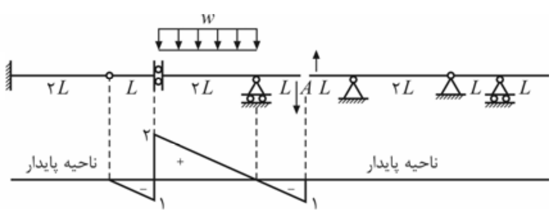
۱) سازه معین است بنابراین کلیهٔ قسمت‌های خط تأثیر به صورت خطی تغییر می‌کنند.

۲) در ناحیه‌های پایدار AB و $CDEF$، عرض خط تأثیر صفر است.

۳) در خط تأثیر خمش در محل مفصل برشی، لازم نیست که شـیب خـط تـأثیر در چـپ و راست مفصل برشی با هم برابر باشد که این مطلب را در نقطه C در این سؤال دیدیم.

۸- (۱)

با استفاده از اصل مولر- برسلاو، برای رسم خط تأثیر یک کمیت، ابتدا عامل مقاومتی را در نقطه مورد نظر حذف کرده و یک جابجایی یا دوران واحد به نقطه مورد نظر اعمال می‌کنیم، شکل تغییر یافته سازه، همان خط تأثیر پارامتر مورد نظر می‌باشد.



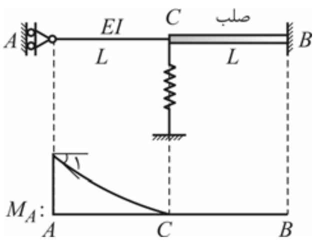
با حذف برش در مفصل خمشی A، این نقطـه هماننـد سـر آزاد تیـر عمـل خواهد کرد و چون قسمت سمت راست این نقطه پایدار است، بنابراین هـیچ تغییرشکلی نخواهد داشت و عرض خط تأثیر در این ناحیــه صـفر اسـت. امـا قسمت سمت چپ مفصل A ناپایدار بوده و در اثر جابجایی واحد تغییرشـکل خواهد داد. باید دقت شود که شیب نمودار خـط تـأثیر در دو طـرف مفصـل

برشی بایستی یکسان باشد.

با توجه به نمودار خط تأثیر و طول متغیر بار، حداکثر برش در A زمانی رخ می‌دهد که بار گسترده یکنواخت تنها در ناحیه بین تکیه‌گاه غلتکی و مفصل برشی وارد شود.

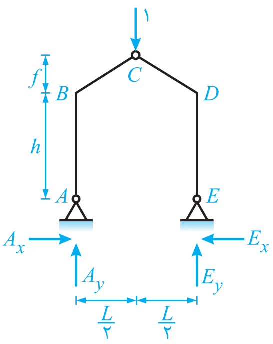
$$(V_A)_{max} = w\times(\frac{۱}{۲}\times۲\times۲L) = ۲wL$$

۹- (۴)



برای رسم خط تأثیر لنگر خمشی در تکیه‌گاه A، عامل مقاومتی در برابر خمش را حذف کرده و دوران واحد را در A ایجاد می‌کنیم. تغییر یافتهٔ سازه، خط تأثیر لنگر خمشی در تکیه‌گاه A می‌باشد. سازه نامعین است بنابراین خط تأثیر می‌تواند به صورت سهمی و یا خطی (قسمت‌های معین سازه) باشد. قطعه صلب BC در تکیه‌گاه B گیردار بوده بنابراین اگر بار واحد در این ناحیه وارد گردد هیچ نیرویی به تکیه‌گاه A وارد نخواهد شد و عرض خط تأثیر در این ناحیه صفر است.

۱۰- (۲)



با توجه به گزینه‌های سؤال، کافی است ارتفاع خط تأثیر را در نقطه C به دست آوریم:

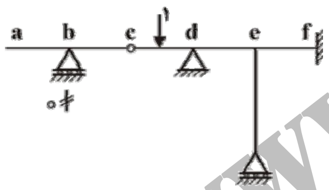
با توجه به تقارن $\Rightarrow A_y = E_y = \frac{۱}{۲}$

قطعهٔ ABC : $\sum M_C = ۰ \Rightarrow A_y \times \frac{L}{۲} = A_x(h+f) \Rightarrow A_x = \frac{L}{۴(h+f)}$

بنابراین ارتفاع خط تأثیر در نقطهٔ C، باید $\frac{L}{۴(h+f)}$ باشد.

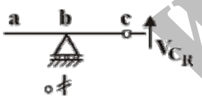
۱۱- (۳)

اگر بار واحد در جایی سمت راست مفصل خمشی **c** وارد شود، برش در سمت راست **C**، صفر خواهد بود. زیرا:

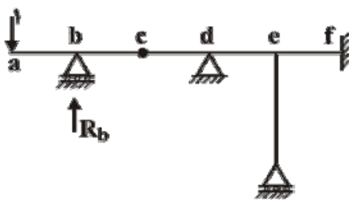


$$\sum M_{c_L} = ۰ \rightarrow R_b = ۰$$

اکنون اگر قطعهٔ **abc** را جداگانه در نظر بگیریم، V_c به دست می‌آید:



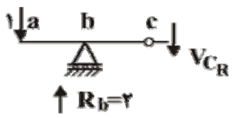
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_{c_R} = ۰$$



بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نادرست می‌باشند. به همین ترتیب اگر بار واحد جایی روی **abc** قرار بگیرد، (به جز در **b**) V_{c_R} صفر نخواهد شد و لذا گزینه «۴» نیز نادرست است. بنابراین گزینه «۳» صحیح است. برای حل دقیق‌تر تست، مقدار V_{c_R} را هنگامی که بار واحد روی **a** قرار می‌گیرد، تعیین می‌کنیم.

$$\sum M_{c_L} = ۰ \rightarrow R_b \times L = ۱\times۲L \Rightarrow R_b = ۲$$

در ادامه اگر قطعهٔ **abc** را جداگانه بررسی کنیم، داریم:

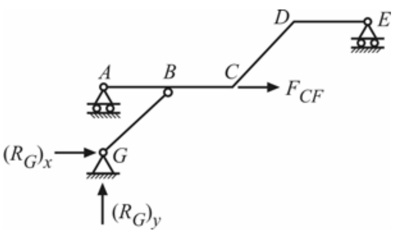


$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow V_{c_R} + ۱ = ۲ \Rightarrow V_{c_R} = ۱$$

۱۲-(۱)

چون بار واحد به صورت قائم و رو به پایین بر روی $ABCDE$ حرکت می‌کند بنابراین عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه G (در صورت غیر صفر بودن) رو به بالا خواهد بود. حال اگر در میله GB معادله لنگر حول مفصل B نوشته شود، جهت عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه G به سمت راست بدست خواهد آمد و اگر معادلهٔ تعادل افقی در کل سازه نوشته شود:

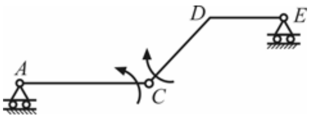
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CF} = -(R_G)_x$$



علامت منفی نشان می‌دهد نیروی F_{CF} فشاری است. از طرفی می‌دانیم که عضو CF، کابل بوده و نیروی فشاری تحمل نمی‌کند لذا به ناچار $F_{CF} = 0$ و نیروی میلهٔ BG نیز صفر است.

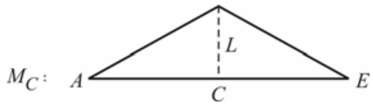
در کل سازه : $\sum F_x = 0 \Rightarrow (R_G)_x = 0 \Rightarrow (R_G)_y = 0$

بنابراین عضو BG صفر نیرویی بوده و می‌توانیم آنرا از سازه حذف کنیم. حال با استفاده از روش مولر - برسلاو خواهیم داشت:



اگر بار واحد در گره C وارد شود:

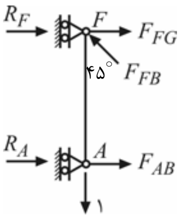
$$M_C = L$$



۱۳-(۴)

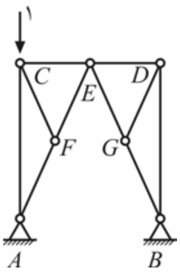
برای به‌دست آوردن عرض خط تأثیر عضو b در نقطهٔ A، بار واحد را در این نقطه وارد می‌کنیم و با استفاده از تعادل نیروها در راستای قائم، نیروی عضو b را به دست می‌آوریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{FB} \times \cos 45^\circ = 1 \Rightarrow F_{FB} = \sqrt{2} \text{ فشاری}$$

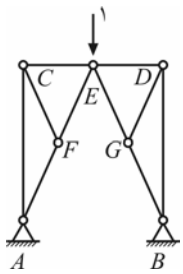


۱۴-(۱)

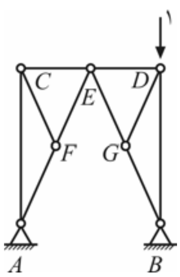
بار واحد را روی گره‌های C، E و D قرار داده و F_{AC} را در هر حالت به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب نمودار خط تأثیر F_{AC} قابل ترسیم است. (از تعادل نیروها در گرهٔ F در می‌یابیم که عضو CF در هر سه خرپا صفر نیرویی می‌باشد.)



گرهٔ C : $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = -1$ (فشاری است)

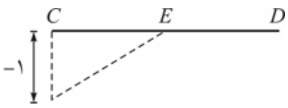


گرهٔ C $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} = F_{AC} = 0$



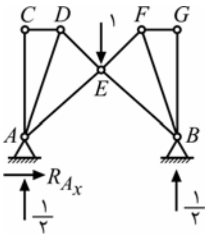
گرهٔ C : $\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{CE} = F_{AC} = 0$

و بنابراین خط تأثیر F_{AC} به‌صورت زیر است:



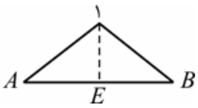
۱۵-(۱)

اگر بار روی A و B قرار گیرد، $R_{A_x}=\circ$ به‌دست می‌آید. بنابراین کافیست عکس‌العمل افقی A (R_{A_x}) را در وضعیت قرارگیری بار روی E بیابیم:



تقارن : $R_{A_y}=R_{B_y}=\frac{۱}{۲}$

$$AEDC:\sum M_E=\circ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۲=R_{A_x}\times ۱ \Rightarrow R_{A_x}=۱$$

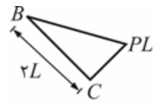


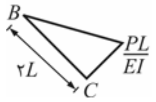
خط تأثیر R_{A_x}

آزمون سوم

۱- (۴)

برای محاسبه زاویه بین مماسهای رسم شده، از روش لنگر سطح استفاده می‌کنیم. برای این کار ابتدا لازم است دیاگرام لنگر خمشی عضو BC را رسم کنیم:

M :


$\frac{M}{EI}$:


در قطعه CDE : $M_C = PL$

$$\theta_{B/C} = \int_{x_B}^{x_C} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI}$$ (مساحت زیر نمودار لنگر در قسمت BC)

$$\theta_{B/C} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2} \times PL \times 2L\right) = \frac{PL^2}{EI}$$

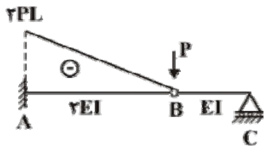
۲- (۱)

با توجه به روابط روش لنگر سطح داریم:

$$\Delta_{C/A} = \sum \left(\frac{A_M \bar{x}}{EI}\right)_i \Rightarrow \Delta_{C/A} = \frac{\frac{PL^2}{2} \times \frac{L}{3}}{EI} - \frac{\frac{PL^2}{2} \times \frac{5L}{3}}{2EI} = -\frac{PL^3}{4EI}$$

۳- (۴)

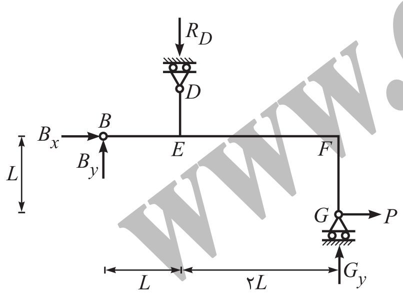
از روش سطح لنگر استفاده می‌کنیم. برای این کار نمودار لنگر خمشی تیر را که به‌صورت زیر می‌باشد، درنظر گرفته و با استفاده از رابط روش سطح لنگر، داریم:



$$\Delta_{A/B} = \frac{A_M \bar{x}}{EI} = \frac{\frac{-2PL \times 2L}{2} \times \frac{2L}{3}}{2EI} = -\frac{2PL^3}{3EI}$$

۴- (۳)

با توجه به اینکه لنگر خمشی در نقطه D صفر است و در فاصله CD بارگذاری وارد نشده است، نمودار لنگر در این فاصله خطی بوده و برای رسم آن کافی است عکس‌العمل قائم را در نقطه D محاسبه کنیم.



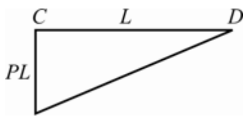
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow G_y = 0$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P \times L = R_D \times L \Rightarrow R_D = P$$

بنابراین مقدار لنگر خمشی در نقطه C برابر است با:

$$M_C = P \times L = PL$$

و نمودار لنگر در این فاصله به‌صورت مقابل است:



لذا داریم:

$$\Delta_{C/D} = \int_C^D \frac{M\bar{x}}{EI} dx = \frac{PL^2}{2EI} \times \frac{1}{3} L = \frac{PL^3}{6EI}$$

۵- (۳)

باتوجه به تیرهای مزدوج رسم شده در گزینه‌ها، کافیست تبدیل گره D از تیر اصلی به تیر مزدوج را بررسی کنیم.

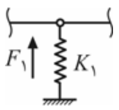
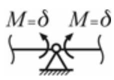
در گره D از تیر اصلی، تغییر مکان قائم تیر، برابر $\frac{F_1}{K}$ است که F_1 نیروی فنر می‌باشد. بنابراین لنگر خمشی در این نقطه از تیر مزدوج نیز باید برابر $\frac{F_1}{K}$ باشد، لذا تیر مزدوج رسم شده در گزینه ۳ صحیح است.

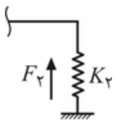
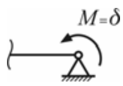
۶- (۴)

در نقاط تکیه‌گاهی و مفصل‌های داخلی (ناپیوستگی‌ها) در تیر اصلی، اگر تغییر مکان وجود داشته باشد، در آن نقطه از تیر مزدوج بایستی لنگر مخالف صفر باشد و اگر شیب وجود داشته باشد، در آن نقطه از تیر مزدوج برش مخالف صفر خواهد بود.


$\begin{cases}\delta \neq 0 \\ \theta = 0\end{cases} \xrightarrow{\text{تیر مزدوج}}$

$\begin{cases}M \neq 0 \\ V = 0\end{cases}$

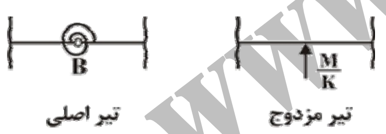

$\begin{cases}\delta = \frac{F_1}{K_1} \;,\; \Delta\delta = 0 \\ \theta_L \neq \theta_R \;\Rightarrow\; \Delta\theta \neq 0\end{cases} \xrightarrow{\text{تیر مزدوج}}$

$\begin{cases}M = \delta = \frac{F_1}{K_1} \\ V_L \neq V_R \;\Rightarrow\; \Delta V \neq 0\end{cases}$


$\begin{cases}\delta = \frac{F_2}{K_2} \\ \theta \neq 0\end{cases} \xrightarrow{\text{تیر مزدوج}}$

$\begin{cases}M = \delta = \frac{F_2}{K_2} \\ V \neq 0\end{cases}$

نکته: اثر نشست تکیه‌گاهی در سازه اصلی با یک لنگر متمرکز در تیر مزدوج نشان داده می‌شود. همچنین اثر چرخش تکیه‌گاهی در سازه اصلی به صورت یک نیروی متمرکز در تیر مزدوج نشان داده می‌شود. مقادیر این لنگر و نیروی متمرکز در تیر مزدوج، همان مقادیر نشست و چرخش در تیر اصلی می‌باشند.

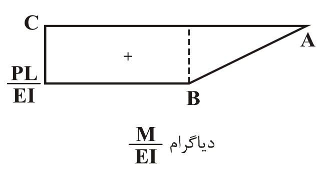
۷- (۲)

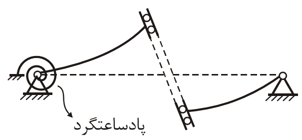
نکته مهم در تبدیل تیر اصلی به تیر مزدوج، گره **B** است. در این گره از تیر اصلی، $\Delta \neq 0$ بوده و θ در سمت چپ و راست باهم برابر نمی‌باشند. بنابراین معادل این اتصال در تیر مزدوج به‌صورت زیر است:

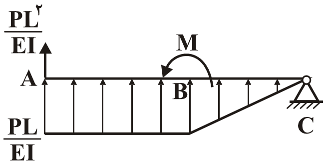


۸- (۱)

برای حل این تست از روش تیر مزدوج استفاده می‌شود. اگر مقدار M در محل مفصل برشی در تیر مزدوج محاسبه گردد برابر اختلاف تغییرمکان در محل مفصل برشی در تیر اصلی است.







$$\sum M_C = 0 \;\Rightarrow\; M = \frac{PL^2}{EI}\times 2L + \frac{PL}{EI}\times L \times \frac{3L}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{PL}{EI}\times L\times\frac{2L}{3}$$

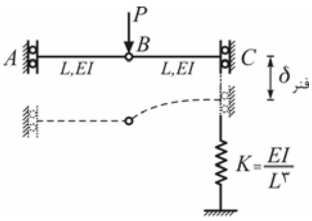
$$\Rightarrow\; M = \frac{23PL^3}{6EI}$$

$$\delta_B = M = \frac{23PL^3}{6EI}$$

⇦ **توجه:** با توجه به تغییرشکل سازه در محل مفصل برشی، تغییرمکان از مثبت به منفی تغییرکرده بنابراین لنگر متمرکز منفی یعنی پادساعتگرد قرار داده می‌شود.

آزمون چهارم

۱- (۱)

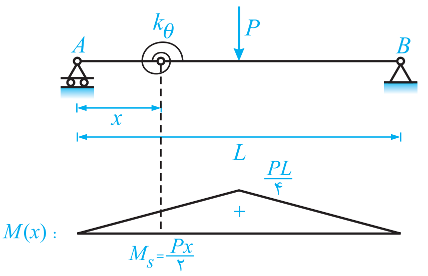


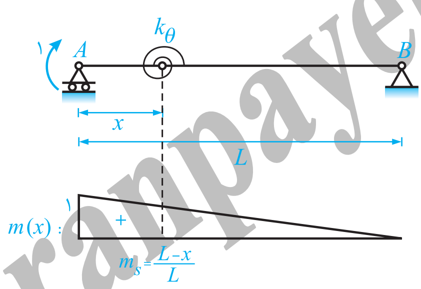
ابتدا باید توجه شود که در قسمت AB نیروی برشی و لنگر خمشی صفر است. بنابراین این عضو به صورت مستقیم باقی می‌ماند. از طرفی با توجه به تکیه‌گاه لغزنده گیردار در A، شیب تیر در A صفر بوده و در نتیجه قسمت AB به صورت یک جسم صلب بدون دوران در راستای قائم جابجا شده و تغییرمکان نقاط A و B یکسان است.

$$\delta_B = \delta_{فنر} + \frac{PL^۳}{۳EI} = \frac{P}{\frac{EI}{L^۳}} + \frac{PL^۳}{۳EI} = \frac{۴PL^۳}{۳EI} \Rightarrow \delta_A = \delta_B = \frac{۴}{۳}\frac{PL^۳}{EI}$$

۲- (۳)

برای حل این سؤال از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا تیر را تحت بارگذاری اصلی تحلیل کرده، نمودار لنگر خمشی در آن را رسم می‌کنیم و نیروی داخلی فنر دورانی را بدست می‌آوریم. سپس همین کار را برای تیر تحت بارگذاری مجازی (لنگر واحد در نقطه A) انجام می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت:





$$۱\times\theta_A = \int_A^B \frac{M(x)m(x)}{EI}dx + \frac{M_s m_s}{k_s}$$

در نهایت با استفاده از قضیه مور:

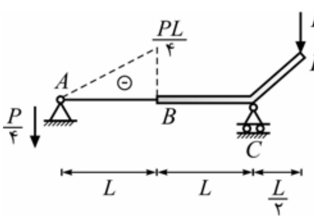
$$\theta_A = \left(\frac{PL}{۴}\times L\times\frac{۱}{۲}\right)\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{EI} + \left(\frac{Px}{۲}\times\frac{L-x}{L}\right)\times\frac{۱}{k_\theta}$$

برای آنکه θ_A بیشینه شود، کافی است از عبارات فوق نسبت به x مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم:

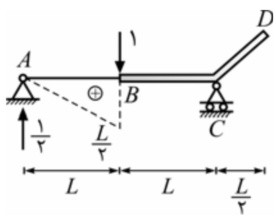
$$\frac{d\theta_A}{dx} = ۰ \Rightarrow -\frac{P}{۲k_\theta L}(۲x-L) = ۰ \Rightarrow x = \frac{L}{۲}$$

۳- (۱)

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. توجه شود که چون BCD صلب است، عبارت‌های مربوط به این قطعه در رابطهٔ بار واحد صفر خواهند شد ($EI \to \infty$ در مخرج است)، لذا کافیست نمودار لنگر خمشی برای قسمت AB در دو سازه بدست بیاید.



سازه تحت بارگذاری حقیقی



سازه تحت بارگذاری مجازی

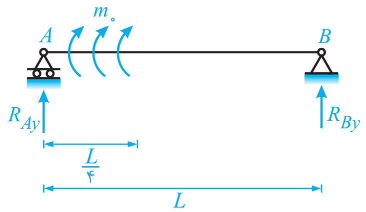
در نهایت با استفاده از روش بار واحد داریم:

$$۱\times\Delta_{B_y} = \left(\frac{A_M\bar{m}}{EI}\right)_{AB} = \frac{-\frac{۱}{۲}\left(\frac{PL}{۴}\times L\right)\times\left(\frac{L}{۲}\times\frac{۲}{۳}\right)}{EI} = -\frac{PL^۳}{۲۴EI}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که نقطه B به سمت بالا می‌رود.

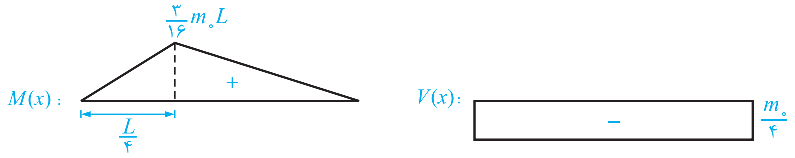
۴- (۳)

ابتدا عکس‌العمل‌های سازه را به‌دست آورده و نمودارهای لنگر خمشی و نیروی برشی را رسم می‌کنیم:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_{Ay} = \frac{-m_\circ}{4}$$

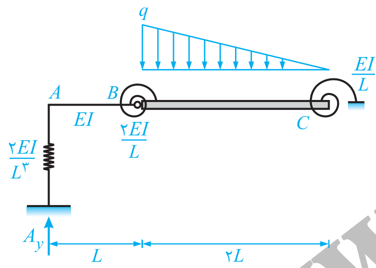
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -R_{By} \Rightarrow R_{By} = +\frac{m_\circ}{4}$$

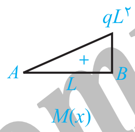


همانطورکه ملاحظه می‌شود نتیجه می‌گیریم تغییرشکل‌های خمشی و برشی هر دو غیرصفر می‌باشند. زیرا هیچ‌یک از نمودارهای رسم شده در طول تیر دارای مقادیر صفر نیستند.

۵- (۳)

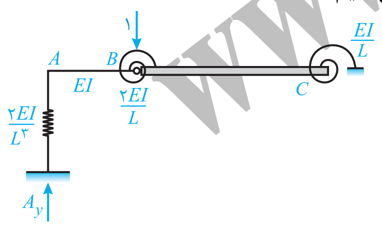
تیر نشان داده شده از فنرهای پیچشی C و B و فنر انتقالی A تشکیل شده، و ناحیه BC در آن صلب می‌باشد. برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم نقطهٔ B از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. بدین منظور ابتدا تیر تحت بارگذاری اصلی را تحلیل و نمودار لنگر خمشی را در آن رسم می‌نماییم. توجه
داشته باشید به دلیل صلب بودن عضو BC نیازی به رسم نمودار لنگر خمشی در ناحیه BC نمی‌باشد.

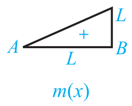




$$\begin{cases} \text{کل سازه}: \sum Fy = 0 \Rightarrow A_y - \frac{1}{2}\times q\times 2L = 0 \Rightarrow A_y = F_s = qL\uparrow \\ AB: \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = qL\times L = qL^2 \\ \text{کل سازه}: \sum M_c = 0 \Rightarrow qL\times\frac{4}{3}L - qL\times 3L + M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{5}{3}qL^2 \end{cases}$$

در ادامه تیر تحت بارگذاری واحد را تشکیل داده و نمودار لنگر خمشی در ناحیه AB را برای آن رسم می‌کنیم:





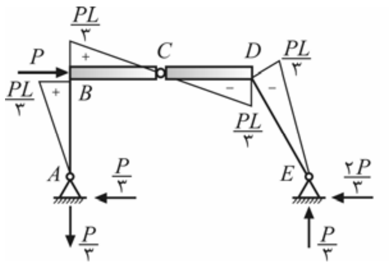
$$\begin{cases} \text{کل سازه}: \sum Fy = 0 \Rightarrow A_y = f_s = 1\uparrow \\ AB: \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = 1\times L = L \\ \text{کل سازه}: \sum M_c = 0 \Rightarrow M_c = L \end{cases}$$

در نهایت با توجه به رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

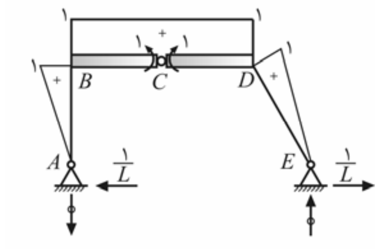
$$1\times\Delta_B = \int\frac{M_{(x)}\,m(x)}{EI}dx + \sum\frac{F_s f_s}{k_s} + \sum\frac{M_s m_s}{k_\theta} = \underbrace{\frac{qL^2\times L\times L}{3EI}}_{AB\ \text{مثلث در}} + \underbrace{\frac{qL\times 1}{\frac{2EI}{L^3}}}_{A\ \text{فنر}} + \underbrace{\frac{qL^2\times L}{\frac{2EI}{L}}}_{B\ \text{فنر}} + \underbrace{\frac{\frac{5}{3}qL^2\times L}{\frac{EI}{L}}}_{C\ \text{فنر}} = 3\frac{qL^4}{EI}$$

۶- (۳)

برای حل این مسئله از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. برای محاسبهٔ اختلاف دوران در طرفین مفصل خمشی C، دو لنگر متمرکز واحد مختلف‌الجهت را در طرفین مفصل خمشی اعمال می‌کنیم و نمودار لنگر خمشی را در دو حالت بارگذاری واقعی و مجازی رسم می‌کنیم:



سازه تحت بارگذاری اصلی



سازه تحت بارگذاری مجازی

$$\Delta\theta=\int\frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI}dx=\frac{1}{EI}\int M(x)\bar{M}(x)dx$$

محاسبهٔ انتگرال $\int M(x)\bar{M}(x)dx$:

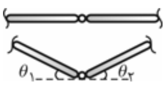
$$\int M(x)\bar{M}(x)dx=A_m\bar{y}$$

در دو ناحیه BC و CD، عبارت EI بی‌نهایت بوده و حاصل $\int\frac{M\bar{M}}{EI}dx$ صفر است. بنابراین تنها دو ناحیه AB و DE را بررسی می‌کنیم:

$$\int M(x)\bar{M}(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{PL}{3}\times L\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{PL}{3}\times\sqrt{2}L\times\frac{2}{3}=\frac{PL^2}{9}-\frac{\sqrt{2}PL^2}{9}$$

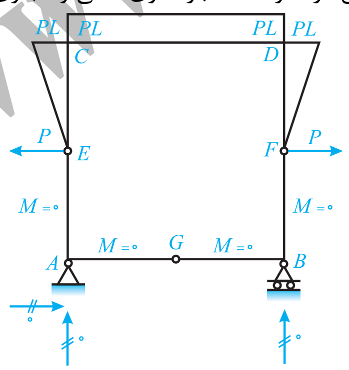
$$\Delta\theta=\frac{A_m\cdot\bar{y}}{EI}=\frac{PL^2}{EI}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{9}\right)=-\frac{PL^2}{EI}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)$$ خلاف جهت لنگرهای اعمال شده

توجه شود که تغییر شکل مفصل C به صورت مقابل است:

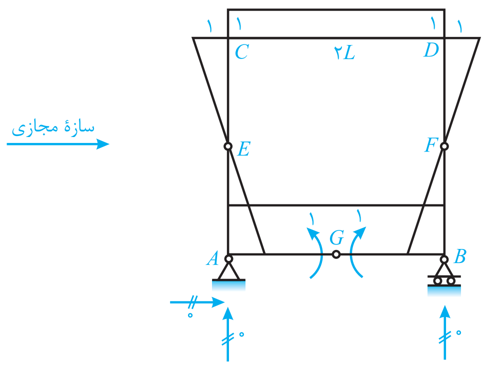


۷- (۱)

برای محاسبهٔ اختلاف شیب در سمت چپ و راست مفصل G، از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. بدین منظور لنگرهای واحد مختلف‌الجهت را در دو طرف مفصل G در سازه تحت بارگذاری واحد اعمال کرده و نمودار لنگر خمشی در سازه تحت بارگذاری اصلی و مجازی را رسم می‌نماییم.



سازه تحت بارگذاری اصلی



سازه تحت بارگذاری مجازی

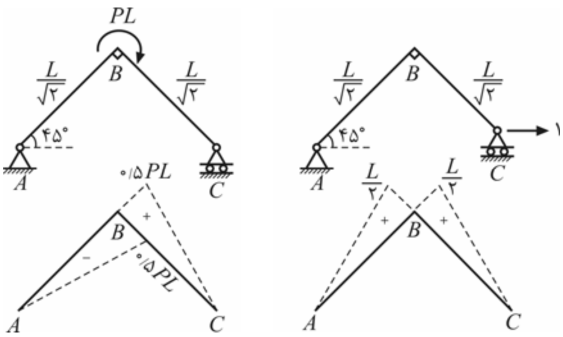
در ادامه با استفاده از رابطه کار مجازی و محاسبه انتگرال به روش مور داریم:

$$1\times(\Delta\theta)=\int\frac{M(x)m(x)}{EI}dx=\boxed{EC}+CD+\boxed{DF}$$

(مشابه)

$$\Rightarrow 2\times\overbrace{\frac{PL\times1\times L}{3EI}}^{\text{مثلث در مثلث } CE,\ DF}+\overbrace{\frac{PL\times1\times2L}{EI}}^{\text{مستطیل در مستطیل } CD}=\frac{8}{3}\frac{PL^2}{EI}$$

۸- (۲)



با استفاده از روش کار مجازی، اگر بخواهیم تغییرمکان افقی تکیه‌گاه C را در اثر خمش محاسبه کنیم، ابتدا باید یک نیروی واحد افقی در نقطهٔ C اعمـال کنیم. حال با استفاده از روابط کار مجازی خواهیم داشت:

$$1\times\Delta_C=\int\frac{Mm}{EI}dx=\sum\frac{1}{EI}(A_m\cdot\bar{y})$$

مقدار $(A_m\cdot\bar{y})$ برای هر سه حالت یکسان است و برابر است با:

برای قطعه AB :

$$(A_m\cdot\bar{y})_{AB}=[(-0.5PL\times\frac{L}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2})\times(\frac{2}{3}\times\frac{L}{2})]=-\frac{\sqrt{2}PL^3}{24}$$

برای قطعه BC :

$$(A_m\cdot\bar{y})_{BC}=[(0.5PL\times\frac{L}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2})\times(\frac{2}{3}\times\frac{L}{2})]=\frac{\sqrt{2}PL^3}{24}$$

محاسبهٔ Δ_C برای حالت‌های (الف) تا (ج):

حالت (الف):

$$\Delta_C=\frac{1}{EI}(-\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})+\frac{1}{3EI}(\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})=-\frac{\sqrt{2}PL^3}{36EI}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که تغییر مکان افقی C ، برخلاف جهت بار واحد، یعنی به سمت چپ می‌باشد.

حالت (ب):

$$\Delta_C=\frac{1}{3EI}(-\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})+\frac{1}{EI}(\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})=\frac{\sqrt{2}PL^3}{36EI}$$

این تغییرمکان در جهت بار واحد، یعنی به سمت راست می‌باشد.

حالت (ج):

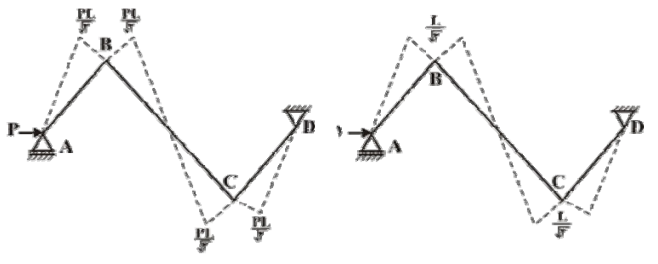
$$\Delta_C=\frac{1}{EI}(-\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})+\frac{1}{EI}(\frac{\sqrt{2}PL^3}{24})=0$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

نکته: در یک سازه معین، تغییر در صلبیت خمشی اجزای آن، نقشی در نمودارهای نیروی برشی و لنگر خمشی ندارد. زیرا تحلیل یک سازه معین فقط با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی انجام می‌گیرد. بنابراین طبق این گفته، در این سؤال نمودارهای لنگر خمشی در هر سه حالت یکسان می‌باشند.

۹- (۳)

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. توجه شود که میزان نزدیک شدن **A** و **D** به هم، همان جابجایی افقی تکیه‌گاه **A** است.



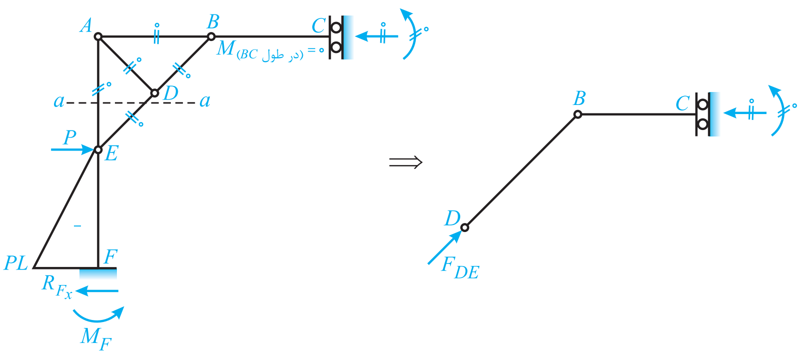
(سازه اصلی) (سازه واحد)

با توجه به رابطه بار واحد داریم:

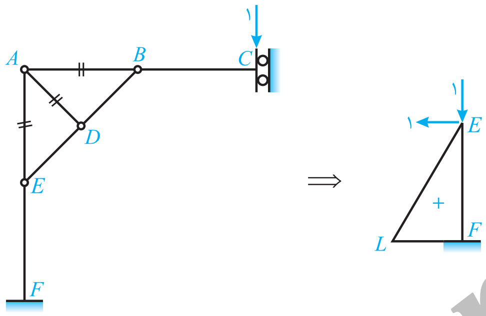
$$\Delta_A\times1=\sum\int\frac{M(x)m(x)}{EI}dx=4\times(\frac{A_M\cdot\bar{m}}{EI})=\frac{4\times(\frac{1}{2}\times\frac{PL}{\sqrt{2}}\times L)\times(\frac{2L}{3\sqrt{2}})}{EI}=\frac{2PL^3}{3EI}$$

۱۰- (۱)

سازه مورد نظر دارای قسمت‌های EF و BC که به صورت خمشی تغییر شکل می‌دهند و سایر قسمت‌ها که به صورت محوری تغییر شکل می‌دهند. (اعضای AB، AD، BD، AF و DF) می‌باشد. بنابراین با استفاده از روش کار مجازی در سازه تحت بارگذاری اصلی و مجازی نمودار لنگر خمشی در اعضا خمشی را رسم کرده و مقادیر نیروی محوری در اعضا محوری را بدست می‌آوریم.



تحلیل سازه تحت بارگذاری اصلی



تحلیل سازه تحت بار واحد

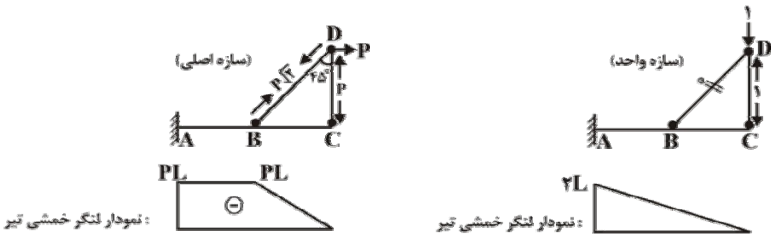
$$\Rightarrow \sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{DE} = ۰ \Rightarrow R_{xc} = ۰ \quad , \quad M_C = ۰$$

از آنجا که نیروهای اعضای محوری در سازه تحت بارگذاری اصلی همگی صفر هستند نیازی به محاسبهٔ نیروی محوری در اعضا تحت بارگذاری مجازی نبوده و تغییر مکان نقطه C تنها وابسته به تغییر شکل‌های خمشی اعضا می‌باشند. بنابراین داریم:

$$۱\times \Delta_{cy} = \int \frac{M(x)m(x)}{EI}dx + \frac{fFL}{AE} = \overbrace{\frac{PL\times L\times L}{۳EI}}^{EF \text{ مثلث در مثلث}} + ۰ = \frac{PL^۳}{۳EI}$$

۱۱- (۲)

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. سازه‌های اصلی و واحد به صورت زیر تحلیل می‌شوند.



رابطه بار واحد در این سوال، به صورت زیر می‌شود. با استفاده از قضیه مور در محاسبه $\int \frac{Mmdx}{EI}$، داریم:

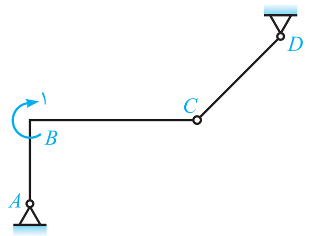
$$\Delta_{D_y} \times ۱ = \sum (\frac{FfL}{EA})_i + \sum (\int \frac{Mmdx}{EI})_i$$

$$\Delta_{D_y} = (\frac{(-P)\times(-۱)\times L}{EA})_{CD} + (\frac{\frac{۱}{۲}L\times L\times \frac{۲PL}{۳}}{EI})_{BC} + (\frac{\frac{۱}{۲}(L+۲L)\times L\times PL}{EI})_{AB} \overset{A=\frac{۲I}{L^۲}}{=} \frac{۷PL^۳}{۳EI}$$

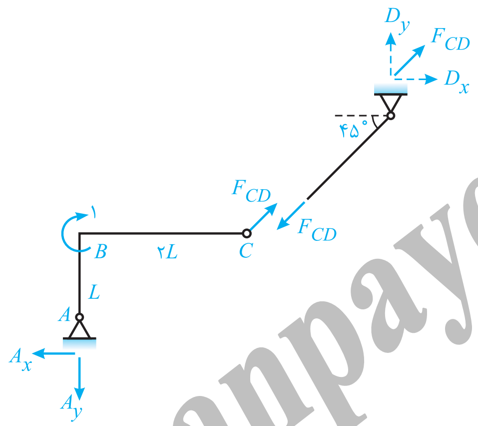
توجه شود که درقضیه مور، از رابطه $\frac{A_m \times \bar{M}}{EI}$ استفاده شده است.

۱۲-(۴)

این قاب تحت اثر نشست‌های تکیه‌گاهی در A و D قرار گرفته است. برای یافتن دوران گره B از قاب باید یک لنگر واحد را در گره B قرار دهیم و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی متناظر با نشست‌های تکیه‌گاهی را به دست آوریم:



عضو CD یک عضو دو نیرویی است:



$$ABC: \sum M_A = 0 \Rightarrow 1 + F_{CD}\cos 45 \times L - F_{CD}\sin 45 \times 2L = 0 \Rightarrow F_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{L}$$

$$\Rightarrow \sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = F_{CD}\sin 45 = \frac{1}{L}\downarrow$$

$$CD: \sum F_x = 0 \Rightarrow D_x = F_{CD}\cos 45 = \frac{1}{L}\longrightarrow$$

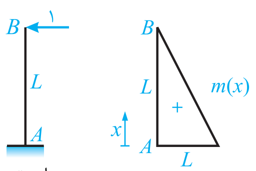
$$\Rightarrow \theta_B + W_R = 0 \Rightarrow \theta_B - A_y \times \delta_A + D_x \times \delta_D = 0$$

$$\theta_B - \frac{1}{L}\times\frac{L}{500} + \frac{1}{L}\times\frac{L}{1000} = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{1}{1000}$$

توجه شود سازه معین بوده و در اثر نشست‌های تکیه‌گاهی هیچ نیروی داخلی در سازه به‌وجود نخواهد آمد.

۱۳-(۲)

با توجه به اینکه سازه موردنظر تحلیل شده است، در سازهٔ واحد، لازم است معین شدهٔ سازهٔ اصلی را تحلیل کنیم:

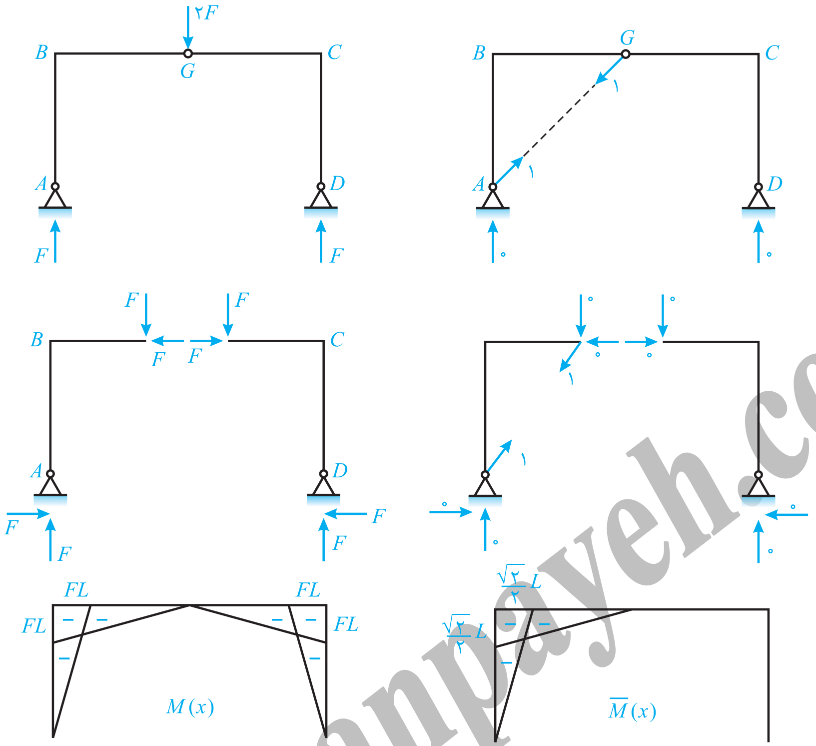


سازه تحت بارگذاری مجازی

$$\Rightarrow 1\times\Delta_B = \int_0^L \frac{m(x)M}{EI}dx = \int_0^L \frac{(L-x)(6wx^2+3wLx+wL^2)}{EI}dx \Rightarrow \Delta_B = \frac{3}{2}\frac{wL^4}{EI}$$

(۱)–۱۴

برای محاسبهٔ میزان نزدیک شدن A و G دو بار واحد را در راستای AG و به صورت مختلف‌الجهت در دو نقطه A و G به طور همزمان وارد می‌کنیم:



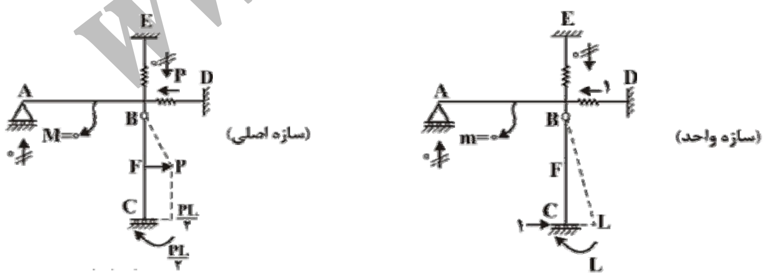
$$\Delta_{A,G} = \int \frac{M\overline{M}}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{FL\times\frac{\sqrt{2}}{2}L\times L}{3}\right]\times 2 = \frac{\sqrt{2}FL^3}{3EI}$$

(۱)–۱۵

سازه داده شده نامعین است:

$$\mathbf{n = 3K + r - (C+3) = 3\times 0 + 5 - (1+3) = 1}$$

اما چون عضو **BC** تغییرطول محوری نمی‌دهد، فنر **E** نیز تغییرطول نمی‌دهد. لذا این فنر صفر نیرویی است. به این ترتیب یک مجهول از تعداد مجهولات کاسته می‌شود و سازه معین می‌شود. از روش بار واحد استفاده می‌کنیم:



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_D = P \qquad \sum F_x = 0 \Rightarrow f_D = 1$$

درعضو BC: $\sum M_B = 0 \Rightarrow M_C = \frac{PL}{2}$

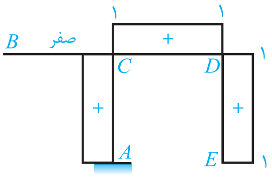
درعضو BC: $\sum M_B = 0 \Rightarrow M_C = L$

با توجه به رابطه روش بار واحد داریم:

$$\Delta_C \times 1 = \sum \int \frac{M(x)m(x)dx}{EI} + \sum \frac{Ff}{k}$$

$$\Delta_C = \left(\frac{A_m \cdot \overline{M}}{EI}\right)_{CF} + \left(\frac{A_M \cdot \overline{m}}{EI}\right)_{FB} + \left(\frac{Ff}{K}\right)_{DB} = \frac{1}{EI}\frac{(L+\frac{L}{2})\times\frac{L}{2}}{2}\times\frac{PL}{2} + \frac{\frac{1}{2}\frac{PL}{2}\times\frac{L}{2}\times\frac{L}{3}}{EI} + \frac{P\times 1}{\frac{EI}{L^3}} \Rightarrow \Delta_C = \frac{59PL^3}{48EI}$$

(۲)–۱۶



ابتدا باید توجه کرد سازه موردنظر معین و فاقد بارگذاری مستقیم و تغییر شکل‌های خمشی می‌باشد. بنابراین دوران نقطه E تنها ناشی از گرادیان حرارتی در سازه می‌باشد. برای محاسبه دوران نقطه C از روش کار مجازی استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب در سازه تحت بارگذاری مجازی یک لنگر واحد در نقطه E قرار داده و سازه را تحلیل می‌کنیم.

در ادامه با استفاده از رابطه کار مجازی داریم:

$$1\times\theta_E = \int m\alpha\frac{(T_1-T_2)}{h}dx = \frac{\alpha(T_1-T_2)}{a}\int m\,dx = \frac{\alpha(T_1-T_2)}{a}(\underbrace{\boxed{1\times L}}_{\text{DE مساحت زیر نمودار m در}} + \underbrace{\boxed{1\times L}}_{\text{CD مساحت زیر نمودار m در}})$$

$$\Rightarrow \theta_E = \frac{2\alpha(T_1-T_2)L}{a}$$

توجه داشته باشید که عضو BC به دلیل صفر بودن لنگر خمشی در آن و عضو AC به دلیل عدم تغییر درجه حرارت آن، در رابطه کار مجازی وارد نشده‌اند.

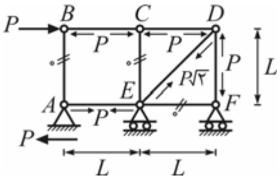
(۳)–۱۷

درجه نامعینی سازه عبارت است از:

$$n = m + r - 2j = 8 + 4 - 2\times 6 = 0$$

خرپا معین است. بنابراین از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.

سازه واحد مشابه سازه اصلی است که به جای P در آن، نیروی واحد قرار می‌گیرد. اعضای صفر نیرویی روی شکل مشخص شده‌اند.



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{A_x} = P$$

$$A: \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AE} = P \text{ (کششی)}$$

$$B, C: \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{BC} = F_{CD} = P \text{ (فشاری)}$$

$$D: \sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} = \sqrt{2}P \text{ (کششی)}$$

$$D: \sum F_y = 0 \Rightarrow F_{DF} = P \text{ (فشاری)}$$

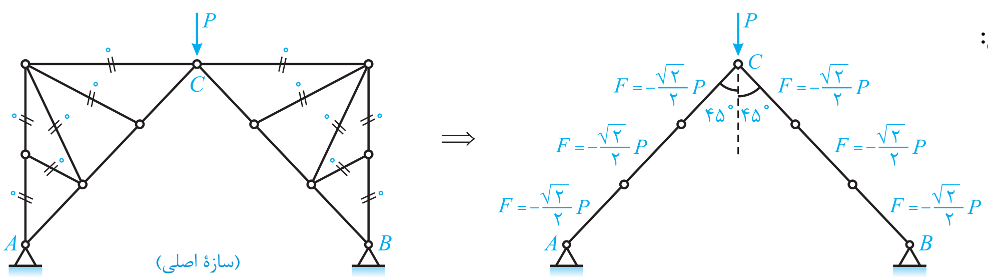
$$1\times\Delta_B = \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{FfL}{EA}\right)_k$$

$$\Delta_B = 3\times\frac{(-P)\times(-1)L}{EA} + \frac{P\times1\times L}{EA} + \frac{(\sqrt{2}P)(\sqrt{2})(\sqrt{2}L)}{EA} = \frac{2PL}{EA}(2+\sqrt{2})$$

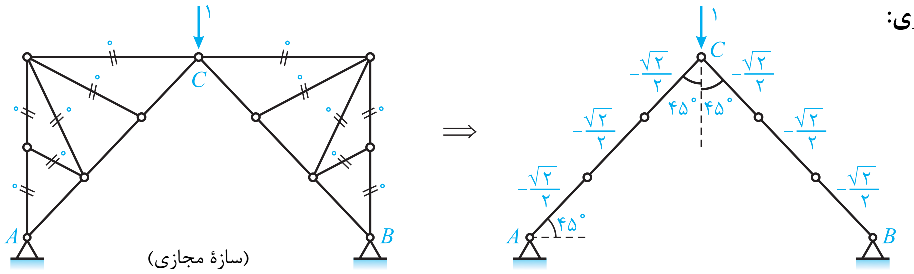
(۴)–۱۸

برای محاسبهٔ تغییر مکان قائم C در سازهٔ (۲)، یک بار واحد قائم در نقطهٔ C بر سازه اعمال کرده و نیروی داخلی ایجاد شده در اعضاء را به‌دست می‌آوریم. دقت شود که تحلیل سازه‌های اصلی و مجازی کاملاً مشابه یکدیگر بوده و نیروی تمام اعضاء سازهٔ اصلی، P برابر سازهٔ مجازی است (چرا؟).

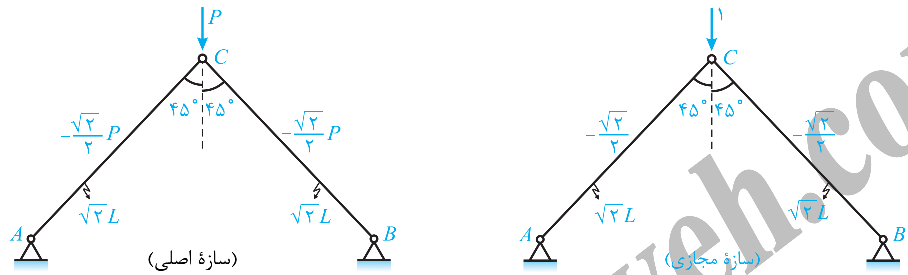
تحلیل سازهٔ اصلی:



تحلیل سازهٔ مجازی:



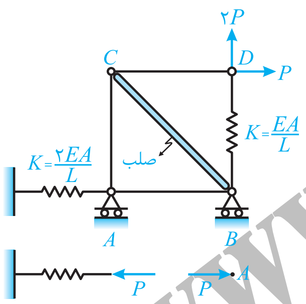
در ادامه با توجه به نداشتن طول قطعه‌های کوچک بین A تا C و B تا C و یکسان بودن نیروی آنها، فرض می‌کنیم که AC و BC دو عضو پیوسته با طول $\sqrt{۲}L$ بوده و تغییر مکان قائم C برابر است با:



$$\Delta_{C_y}=۲\times\frac{(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}P)\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})\times\sqrt{۲}L}{AE}=\sqrt{۲}\,\frac{PL}{AE}$$

۱۹-(۴)

تغییرمکان قائم نقطه D برابر تغییرطول فنر BD و تغییرمکان افقی نقطه A برابر تغییرطول فنر تکیه‌گاهی متصل به نقطه A می‌باشد. بنابراین فقط کافیست نیروی داخلی فنرها را به‌دست آورده و نیازی به استفاده در رابطه کار مجازی نخواهد بود.

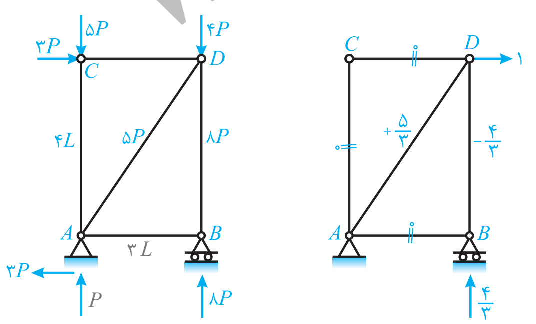


$$\left.\begin{array}{l}(\Delta_V)_D=\dfrac{۲PL}{EA}\\[2mm](\Delta_h)_A=\dfrac{PL}{۲EA}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{(\Delta_V)_D}{(\Delta_h)_A}=۴$$

۲۰-(۳)

ابتدا با استفاده از روش کار مجازی تغییرمکان افقی گره D را به‌دست می‌آوریم.

بدین منظور سازه تحت بارگذاری اصلی و مجازی را به‌صورت مقابل تحلیل نماییم.



تحلیل خرپا تحت بارگذاری اصلی تحلیل خرپا تحت بارگذاری مجازی

در ادامه با توجه به رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

$$۱\times\Delta_D=\sum_{i=۱}^{۲}\left(\frac{FfL}{EA}\right)_i=\frac{\frac{۵}{۳}\times۵P\times۵L}{E\times A}+\frac{\frac{۴}{۳}\times۸P\times۴L}{E\times A}=\Delta\Rightarrow A\approx\frac{۲۵۳}{۳}\,\frac{PL}{E\Delta}\Rightarrow A>\frac{۲۵۳}{۳}\,\frac{PL}{E\Delta}$$

۲۱-(۱)

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم.

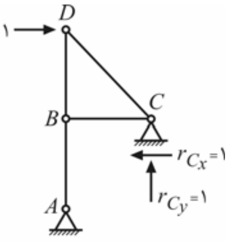
$$n=m+r-۲j=۴+۴-۲\times۴=۰$$

بنابراین سازه معین است و نیروی داخلی اعضای سازه تحت نشست‌های تکیه‌گاهی اتفاق افتاده، صفر می‌باشد.

پس در رابطه بار واحد، نیروهای F_i صفر خواهند بود:

$$۱\times\Delta_D+\underbrace{\sum\delta\times r}_{\text{ناشی از نشست‌های تکیه‌گاهی}}=\sum\left(\frac{FfL}{EA}\right)_i$$

خرپای واحد به‌صورت مقابل تحلیل می‌شود:



سازه تحت اثر بار واحد مجازی

بنابراین جابجایی افقی D برابر است با:

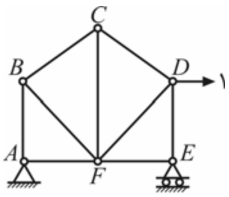
$$۱\times\Delta_D+۱\times۱+۱\times(-۱/۵)=۰\ \Rightarrow\ \Delta_D=۰/۵\,cm$$

۲۲- (۲)

از روش بار واحد استفاده می‌کنیم. ابتدا درجهٔ نامعینی سازه را می‌یابیم:

$$n=m+r-۲j=۹+۳-۲\times۶=۰$$

از آنجا که سازه معین است، خطای ساخت هیچ نیروی داخلی در اعضای خرپا ایجاد نمی‌کند. بنابراین کافیست در سازه واحد، نیروی عضو CF را که خطای ساخت دارد، بیابیم.



$$۱\times\Delta_D=f_{CF}\times\Delta_{(\text{خطای ساخت})}$$

f_{CF} نیروی عضو CF در سازه واحد مطابق شکل فوق است. طبق راهنمایی داده شده در مسأله داریم:

$$P_{(D\ \text{نیروی افقی در})}=۷\,ton\ \Rightarrow\ f_{CF}=-۲/۶۲۵\,ton\ \ (\text{فشاری})$$

$$P_{(D\ \text{نیروی افقی در})}=۱\,ton\ \Rightarrow\ f_{CF}=\frac{۱}{۷}(-۲/۶۲۵)=-۰/۳۷۵\ \ (\text{فشاری})$$

چون گفته شده CF کوتاهتر ساخته شده، بنابراین $\Delta_{(\text{خطای ساخت})}$ باید با علامت منفی لحاظ شود.

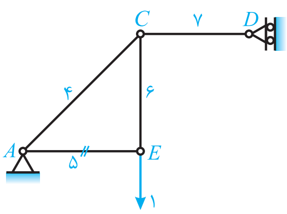
$$۱\times\Delta_D=-۰/۳۷۵\times(-۲)=+۰/۷۵\,cm$$

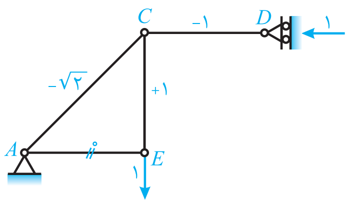
علامت مثبت نشان می‌دهد تغییرمکان افقی D با جهت بار واحد اعمال شده یکسان بوده و به سمت راست می‌باشد.

۲۳- (۲)

با توجه به اینکه خرپا نامعین بوده ولی تحت اثر بارگذاری خارجی روی آن، نیروی اعضاء خرپا مشخص می‌باشد، برای محاسبهٔ تغییر مکان نقطه‌ای دلخواه از خرپا کافی است بخشی پایدار و معین شامل نقطهٔ E را از خرپا جدا نموده و با استفاده از روش کار مجازی، جابه‌جایی آن را محاسبه کنیم. دقت کنید که برای انتخاب بخشی پایدار و معین از خرپا حتماً باید به گزینه‌های سؤال توجه کنید. زیرا به شکل‌های متفاوتی می‌توان بخشی معین و پایدار را از خرپا جدا کرد. بنابراین با توجه به گزینه‌ها بخش پایدار و معین از خرپا را طوری انتخاب می‌کنیم که اعضای ۷، ۶ و ۴ در آن موجود باشند.

در نهایت با توجه به رابطه کار مجازی خواهیم داشت:



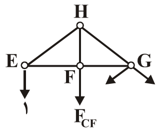


$$\Delta_{E_y}=\sum\frac{FfL}{AE}=\frac{N_۵\times۰\times L}{AE}+\frac{N_۶\times(+۱)\times L}{AE}+\frac{N_۷\times(-۱)\times L}{AE}+\frac{N_۴\times(-\sqrt{۲})\times L\sqrt{۲}}{AE}$$

$$\Delta_{E_y} = \frac{L}{EA}(N_{۷} + N_{۶} - ۲N_{۴})$$

۲۴- (۳)

برای حل این تست از روش بار واحد استفاده می‌شود. جهت محاسبه نیروی عضو CF تحت بار واحد قائم در E، از برشی که اعضای CF ، CG و GD را قطع کند استفاده می‌شود.



$$\curvearrowleft^{+} \sum M_G = ۰ \Rightarrow -F_{FC} \times ۲ - ۱ \times ۴ = ۰ \Rightarrow F_{CF} = ۲ \text{ فشاری}$$

در کل خرپا : $\sum M_A = ۰ \Rightarrow ۱ \times ۲ = R_B \times ۴ \Rightarrow R_B = \frac{۱}{۲}\downarrow$

لذا خواهیم داشت:

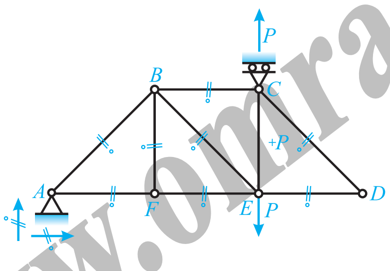
$$۱ \times \Delta_E + W_R = \sum_i (nL\alpha\Delta T)_i \Rightarrow ۱ \times \Delta_E + (\frac{۱}{۲} \times ۵) = (-۲) \times ۱۰^{-۵} \times ۳۰ \times ۲۰۰۰ \Rightarrow \Delta_E = -۳/۷ mm$$

جواب منفی شد و این بدین معنی است که تغییرمکان گره E برخلاف بار واحد یعنی رو به بالا می‌باشد.

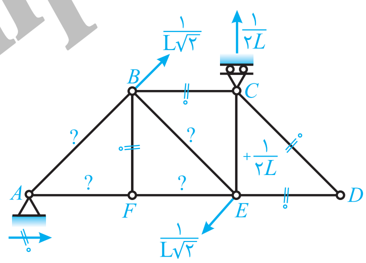
⇦ **توجه:** جهت عکس‌العمل تکیه‌گاه B تحت بار واحد، با جهت نشست یکسان بودند.

۲۵- (۱)

برای محاسبهٔ دوران عضو BE ، باید در سازه تحت بارگذاری مجازی زوج نیرو به اندازهٔ $\frac{۱}{L_{BE}}$ را در دو سر عضو BE و عمود بر راستای آن اعمال نمائید. در این‌صورت تحلیل سازه تحت بارگذاری اصلی و مجازی به‌صورت زیر خواهد بود:



تحلیل خرپا تحت بارگذاری اصلی



تحلیل خرپا تحت بارگذاری مجازی

با توجه به تحلیل خرپا تحت بارگذاری اصلی و صفر نیرویی شدن بیشتر اعضاء آن، در تحلیل خرپا تحت بارگذاری مجازی نیروی اعضایی که به آنها نیاز نداشتیم را محاسبه نکرده و با علامت سؤال نشان داده‌ایم. توجه داشته باشید که این دقت و نگاه مفهومی، سرعت حل سؤال را برای شما بیشتر خواهد کرد.

در این‌صورت با توجه به رابطه کار مجازی خواهیم داشت:

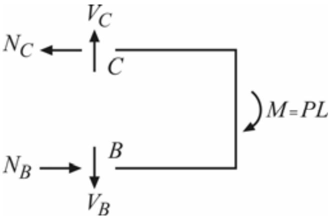
$$۱ \times \theta_{BE} = (\frac{FfL}{EA})_{CE} = \frac{P \times \frac{۱}{۲L} \times L}{EA} = \frac{P}{۲EA} \Rightarrow \theta_{BE} = \frac{P}{۲EA}$$

از آنجا که علامت به‌دست آمده برای θ_{BE} مثبت است، دوران این عضو هم‌جهت با لنگر ایجاد شده در سازه واحد و به صورت ساعتگرد می‌باشد.

آزمون پنجم

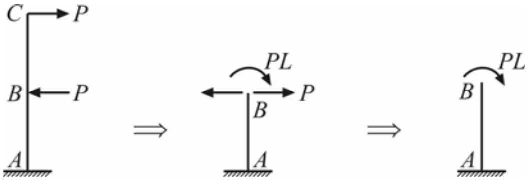
۱- (۲)

ابتدا قسمت BC را مطابق شکل به‌طور جداگانه درنظر می‌گیریم:



$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow N_B L = PL \Rightarrow N_B = P$$
$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow N_C = P$$

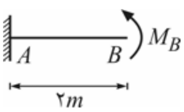
عکس این نیروها به ستون ABC می‌رسد. چون Δ_{B_x} را می‌خواهیم، می‌توان قسمت BC را که به صورت طره می‌باشد حذف نموده و بـار P را از C به B منتقل کنیم و لنگر ناشی از این انتقال را نیز در B لحاظ نماییم.



$$\Delta_B = \frac{(PL)(L^۲)}{۲EI} = \frac{PL^۳}{۲EI}$$

۲- (۲)

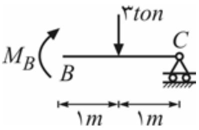
قطعه AB به‌صورت مقابل بارگذاری می‌شود.



$$\Delta_B = \frac{M_B (L_{BA})^۲}{۲EI}$$

از معادلات تعادل در قسمت BC، M_B به‌دست می‌آید.

توجه شود که به علت وجود مفصل برشی، V_B در هر دو قسمت AB و BC صفر است.

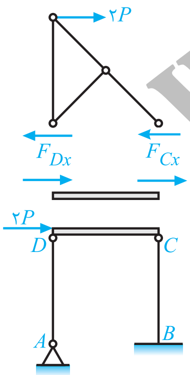


$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow M_B = ۳\ ton.m$$

بنابراین Δ_B برابر است با:

$$\Delta_B = \frac{۳\times۲^۲}{۲\times۱۰^۳}\times۱۰^۳ = ۶\ mm$$

۳- (۳)



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{Cx} + F_{Dx} = ۲P$$

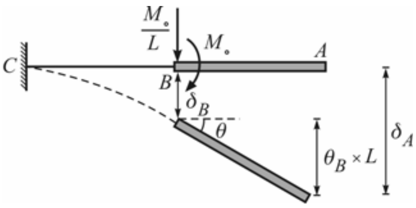
لذا مسأله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{۲P}{k_{AD} + k_{BC}} = \frac{۲P}{۰ + \frac{۳EI}{L^۳}} = \frac{۲PL^۳}{۳EI}$$

توجه: بارهای قائم را لحاظ نکرده‌ایم. زیرا تأثیری در تغییرمکان افقی سازه نخواهند داشت.

۴- (۳)

به علت صلب بودن قسمت BA، این قسمت مطابق شکل به صورت خطی تغییرشکل می‌دهد، یعنی دوران نقاط B و A یکسان است.

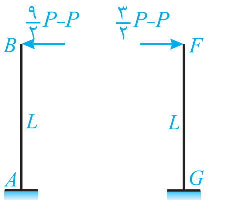


$$\delta_A = \delta_B + \theta_B \times L$$

$$\delta_B = \frac{(\frac{M_\circ}{L})\,L^۳}{۳EI} + \frac{M_\circ L^۲}{۲EI} = \frac{۵M_\circ L^۲}{۶EI} \quad , \quad \theta_B = \frac{(\frac{M_\circ}{L})\,L^۲}{۲EI} + \frac{M_\circ L}{EI} = \frac{۳M_\circ L}{۲EI}$$

$$\delta_A = \frac{۵M_\circ L^۲}{۶EI} + \frac{۳M_\circ L}{۲EI} \times L = \frac{۷M_\circ L^۲}{۳EI}$$

۵- (۲)



$BCDEF$ تعادل : $\sum M_B = ۰ \Rightarrow ۳P \times L - ۶P \times \frac{۳L}{۲} + F_y \times ۲L = ۰ \Rightarrow R_{F_y} = ۳P \uparrow$

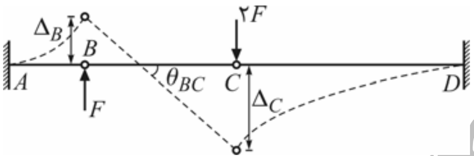
$\sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{By} = ۳P \uparrow$

FED تعادل : $\sum M_D = ۰ \Rightarrow ۳P \times \frac{L}{۲} - R_{F_x} \times L = ۰ \Rightarrow R_{F_x} = \frac{۳}{۲}P \leftarrow$

BCD تعادل : $\sum M_D = ۰ \Rightarrow ۳P \times \frac{۳L}{۲} - R_{B_x} \times L = ۰ \Rightarrow R_{B_x} = \frac{۹}{۲}P \rightarrow$

$$\delta_{BF} = \delta_B + \delta_F = \frac{\frac{۷}{۲}PL^۳}{۳EI} + \frac{\frac{۱}{۲}PL^۳}{۳EI} = \frac{۴}{۳}\frac{PL^۳}{EI}$$

۶- (۱)

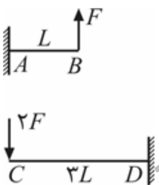


تغییرشکل این سازه به‌صورت مقابل می‌باشد:

عضو BC دوسر مفصل بوده و لنگر خمشی و نیروی برشی در طول آن صفر است.

بنابراین کل بار F به AB و کل بار $۲F$ به CD می‌رسد.

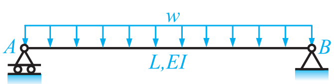
باتوجه به شکل: $\theta_{BC} = \dfrac{\Delta_B + \Delta_C}{L_{BC}}$



$$\begin{cases} \Delta_B = \dfrac{FL^۳}{۳EI} \\ \Delta_C = \dfrac{۲F(۳L)^۳}{۳EI} = \dfrac{۱۸FL^۳}{EI} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta_{BC} = \frac{\frac{FL^۳}{۳EI} + \frac{۱۸FL^۳}{EI}}{۲L} = \frac{۵۵FL^۲}{۶EI}$$

۷- (۲)

با توجه به اینکه در قطعه BC برش و خمش رخ نمی‌دهد، لذا گره B ساکن بوده و می‌توان آن را با تکیه‌گاه مفصلی مدل نمود. لذا داریم:

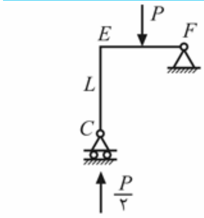


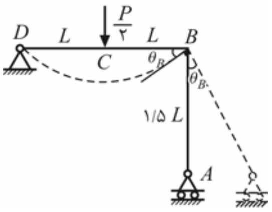
$$\theta_B = \frac{wL^۳}{۲۴EI}$$

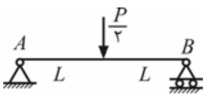
۸- (۴)

ابتدا سازه را در محل اتصال C جدا می‌کنیم.

عضو AB تحت خمش قرار نمی‌گیرد و به صورت مستقیم باقی مـی‌مانـد. لـذا تغییـر مکـان تکیه‌گاه A برابر است با:







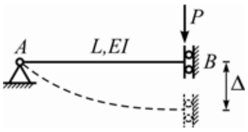
$$\delta_A = \theta_B \times ۱/۵ L$$

$$\theta_B = \frac{(\frac{P}{۲})(۲L)^۲}{۱۶EI} = \frac{PL^۲}{۸EI}$$

$$\delta_A = \theta_B \times ۱/۵ L = \frac{PL^۲}{۸EI} \times \frac{۳}{۲} L = \frac{۳PL^۳}{۱۶EI}$$

۹- (۱)

با توجه به اینکه عضو BC صلب است و نقطه C تنها در راستای قائم حرکت می‌کند دوران آن صفر است بنابراین $\theta_B = ۰$ است و می‌توان سـازه را به‌صورت مقابل در نظر گرفت.



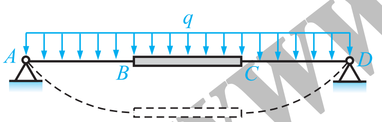
برای تیر فوق داریم:

$$\Delta_B = \frac{PL^۳}{۳EI}$$

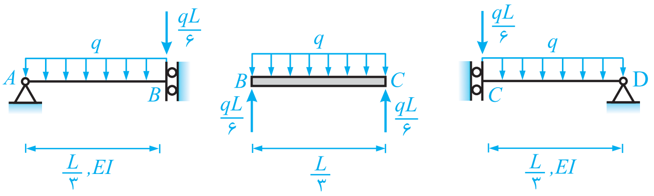
بنابراین تغییر مکان نقاط B و C با هم یکسان بوده و برابر $\frac{PL^۳}{۳EI}$ است.

۱۰- (۴)

با توجه به وجود تقارن در سازه، عضو صلب دورانی ندارد و تغییر شکل آن مطابق شکل مقابل است:



از هندسهٔ تغییر شکل یافتهٔ تیر مشابه با تمرین (۹-۱۸) می‌توان فهمید که مدل تغییر شکل در قطعات AB و CD شبیه تیرهای یـک سـر مفـصل یک سر لغزنده گیردار می‌باشد و داریم:



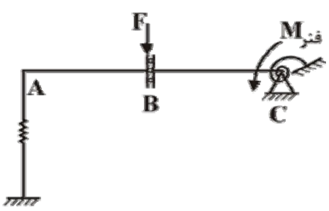
$$\Delta_B = \Delta_C = \frac{\frac{qL}{۶} \times (\frac{L}{۳})^۳}{۳EI} + \frac{۵q(\frac{L}{۳})^۴}{۲۴EI} = \frac{qL^۳}{۲۱۶EI}$$

۱۱- (۲)

نکته: هرگاه بتوان قسمت پایداری از سازه را از آن جدا کرد، به طوریکه نیروهای موجود در محل جداشدگی مشخص باشند، می‌توان قـسمت جداشده را تحلیل نمود. نتایج به دست آمده برای این قسمت با نتایج سازه اصلی مشابه‌اند.

حل تست:

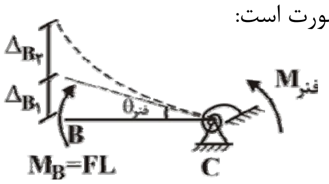
با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی، لنگر خمشی در سمت راست **B** را می‌یابیم:



$$\text{B سمت راست}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow R_{C_y} = ۰ \quad , \quad \sum M_A = ۰ \Rightarrow M_{\text{فنر}} = FL$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{A\,\text{فنر}} = F \Rightarrow M_B = F_{\text{فنر}} \times L_{AB} = FL$$

اکنون می‌توان قسمت پایدار **BC** را از سازه جدا کرد و آن را تحلیل نمود. بارگذاری روی این قسمت به این صورت است:



Δ_{B_y} از دو قسمت تشکیل شده است.

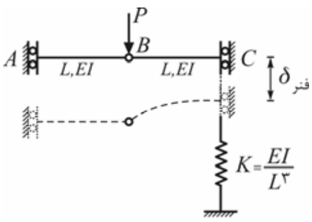
$$\Delta_{B_y} = \Delta_{B_1} + \Delta_{B_2} = \theta_{\text{فنر}} \times L + \left(\frac{ML^2}{2EI}\right)$$

دوران فنر **C**: Δ_{B_1}

تغییرشکل خمشی در **BC** به صورت تیرطره: Δ_{B_2}

$$\Delta_{B_y} = \frac{FL \times L}{\frac{EI}{L}} + \frac{FL^3}{2EI} = \frac{3FL^3}{2EI}$$

(۱)-۱۲

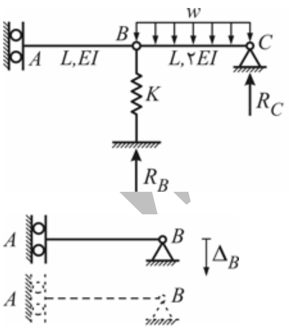


ابتدا باید توجه شود که در قسمت AB نیروی برشی و لنگر خمشی صفر است. بنابراین این عضو به صورت مستقیم باقی می‌ماند. از طرفی با توجه به تکیه‌گاه لغزنده گیردار در A، شیب تیر در A صفر بوده و در نتیجه قسمت AB به صورت یک جسم صلب بدون دوران در راستای قائم جابجا شده و تغییرمکان نقاط A و B یکسان است.

$$\delta_B = \delta_{\text{فنر}} + \frac{PL^3}{3EI} = \frac{P}{\frac{EI}{L^3}} + \frac{PL^3}{3EI} = \frac{4PL^3}{3EI}$$

$$\delta_C = \delta_{\text{فنر}} = \frac{F_s}{K} = \frac{P}{\frac{EI}{L^3}} = \frac{PL^3}{EI} \Rightarrow \delta_A = \delta_B = \frac{4}{3}\delta_C = \frac{4PL^3}{3EI}$$

(۴)-۱۳



با اندکی دقت، می‌توان دریافت که قطعهٔ AB از سازه مانند یک تیر مفصلی، لغزنده گیردار می‌باشد که در تکیه‌گاه B به اندازهٔ تغییر طول فنر پایین می‌آید. با توجه به صفر بودن لنگر در قطعهٔ AB نقطهٔ A نیز همین‌قدر پایین می‌آید.

$$\begin{cases} BC \text{ قطعهٔ}: \sum M_B = 0 \Rightarrow R_C = \frac{wL}{2} \\ ABC \text{ قطعهٔ}: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = \frac{wL}{2} = F_{\text{فنر}} \end{cases} \Rightarrow \Delta_B = \frac{F_{\text{فنر}}}{K_{\text{فنر}}} = \frac{\frac{wL}{2}}{\frac{EI}{L^3}} = \frac{wL^4}{2EI}$$

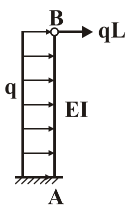
در ادامه جابه‌جایی نقطهٔ A به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\Rightarrow \Delta_A = \Delta_B = \Delta_{\text{فنر}} = \frac{wL^4}{2EI}$$

(۴)-۱۴

در قاب داده شده عضو CD یک عضو دونیرویی می‌باشد و تنها نیروی محوری دارد. بنابراین این عضو تحت خمش قرار نمی‌گیرد و به صورت خطی تغییرشکل می‌دهد.

⇦ **توجه:** عضو CD سهمی از تحمل بارهای وارده ندارد.

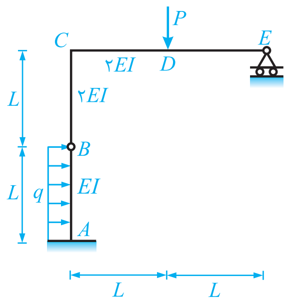


$$\delta_B = \delta_C$$

$$\delta_B = \frac{qL^4}{8EI} + \frac{(qL)L^3}{3EI} = \frac{11qL^4}{24EI}$$

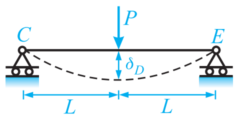
$$(\delta_{mid})_C = \frac{\delta_C}{2} = \frac{\frac{11qL^4}{24EI}}{2} = \frac{11qL^4}{48EI}$$

(۴)-۱۵



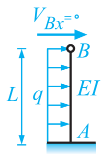
$$BCDE:\sum F_x=۰\Rightarrow V_{B_x}=۰$$

از آنجاکه برشی در قطعه BC اتفاق نمی‌افتد، لذا گره C را می‌توان تکیه‌گاه مفصلی در نظر گرفت. در این حالت داریم:



$$\delta_D=\frac{P\times(۲L)^۳}{۴۸\times(۲EI)}=\frac{PL^۳}{۱۲EI}$$

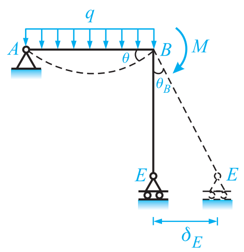
برای به‌دست آوردن تغییرمکان افقی B داریم:



$$\delta_B=\frac{qL^۴}{۸EI}\Rightarrow\frac{\delta_D}{\delta_B}=\frac{\frac{\overset{۲qL}{(P)}L^۳}{۱۲EI}}{\frac{qL^۴}{۸EI}}=\frac{۴}{۳}$$

(۱)-۱۶

با اندکی دقت در سازه متوجه خواهید شد که لنگر خمشی در عضو BE برابر صفر است (چرا؟) و این عضو به‌صورت خطی تغییر شکل خواهد داد. از طرفی با توجه به اینکه اعضا دارای صلبیت خمشی هستند در امتداد محور خودشان تغییر طول نداده و می‌توان گفت نقطه B جابه‌جا نخواهد شد. بنابراین می‌توان قطعه AB را به صورت تیر دو سر مفصل مطابق شکل در نظر گرفت. مطابق شکل تغییر مکان تکیه‌گاه E برابر است با:



$$\delta_E=\theta_B\times L_{BE}$$

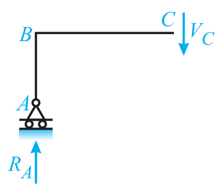
برای محاسبه θ_B از روابط حفظی تیر دو سر مفصل استفاده می‌کنیم. بدین منظور باید مقدار لنگر خمشی M را از تعادل قطعه BCD به‌دست آوریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\text{تعادل قطعه } CD:\sum M_D=۰\Rightarrow V_C=۲qL\\ \text{تعادل قطعه } BC:\sum M_B=۰\Rightarrow M_B=qL^۲\end{cases}\Rightarrow\theta=\theta_B=\frac{qL^۳}{۲۴EI}-\frac{\overbrace{(qL^۲)}^{M_B}(L)}{۳EI}=-\frac{۷qL^۳}{۲۴EI}$$

در نهایت تغییر مکان نقطه E برابر است با:

$$\delta_E=\theta_B\times L_{BE}=-\frac{۷qL^۳}{۲۴EI}\times L=-\frac{۷qL^۴}{۲۴EI}\ \text{(به سمت چپ)}$$

(۳)-۱۷

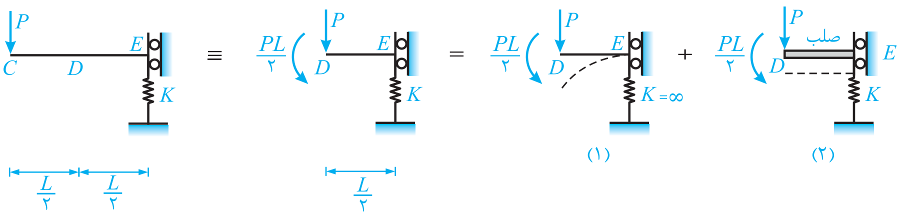


سازه معین موردنظر از اعضای انعطاف‌پذیر AB، BC، CE و فنر تشکیل شده است. بنابراین می‌توان با استفاده از اصل انعطاف‌پذیری آن را تحلیل کرد. بدین منظور ابتدا سازه را از محل مفصل C جدا کرده و داریم:

$$\text{تعادل } ABC:\begin{cases}\sum M_C=۰\Rightarrow R_A=۰\\ \sum F_y=۰\Rightarrow V_C=۰\end{cases}$$

در این صورت سازه به شکل زیر تبدیل شده و برای محاسبه δ_D می‌توانیم سازه را به صورت شکل زیر در نظر بگیریم و در دو مرحله δ_D را به‌دست آوریم.

مرحله اول: فرض می‌کنیم که فقط قطعه خمشی DE تغییر شکل می‌دهد و فنر تغییر شکل نخواهد داشت. در این صورت قطعه BD مانند تیر طره رفتار می‌کند و داریم:



$$\delta_{D_۱}=\frac{P(\frac{L}{۲})^۳}{۳EI}+\frac{(\frac{PL}{۲})(\frac{L}{۲})^۲}{۲EI}=\frac{PL^۳}{۲۴EI}+\frac{PL^۳}{۱۶EI}=\frac{۵}{۴۸}\frac{PL^۳}{EI}$$

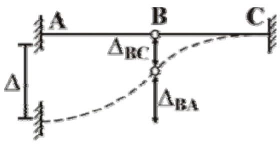
مرحله دوم: فرض می‌کنیم که فقط فنر تغییر شکل داشته باشد. در این صورت عضو DE مانند قطعه صلب بوده و تنها به صورت افقی در راستای قائم جابه‌جا خواهد شد. بنابراین داریم:

$$DE\ \text{تعادل}: \sum F_y=۰ \Rightarrow R_E=F_{\text{فنر}}=P \Rightarrow \delta_{D_۲}=\frac{F}{k}=\frac{P}{\frac{۲EI}{L^۳}}=\frac{PL^۳}{۲EI}$$

$$\delta_D=\delta_{D_۱}+\delta_{D_۲}=\frac{۵}{۴۸}\frac{PL^۳}{EI}+\frac{۱}{۲}\frac{PL^۳}{EI}=\frac{۲۹}{۴۸}\frac{PL^۳}{EI}$$

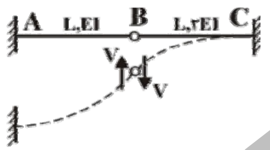
۱۸-(۳)

گره **C** هیچ گونه جابجایی نداشته و دوران نیز نمی‌کند. لذا می‌توان آن را به عنوان تکیه‌گاه گیردار برای تیر **ABC** در نظر گرفت. تغییرشکل سازه در اثر نشست تکیه‌گاه **A** به‌صورت زیر است:



$$\text{رابطه سازگاری}: \Delta_{BC}+\Delta_{BA}=\Delta$$

فرض کنید در گره **B**، نیروی برش **V** ایجاد شود. بادر نظر گرفتن تیرهای **AB** و **BC** به‌طور جداگانه، Δ_{AB} و Δ_{BC} به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

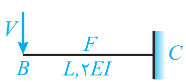


$$\Delta_{AB}=\frac{VL^۳}{۳EI}\ ,\ \Delta_{BC}=\frac{VL^۳}{۳(۲EI)}=\frac{VL^۳}{۶EI}$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه سازگاری، **V** به دست می‌آید:

$$\Delta_{BC}+\Delta_{AB}=\frac{VL^۳}{۶EI}+\frac{VL^۳}{۳EI}=\Delta \Rightarrow V=\frac{۲\Delta EI}{L^۳}$$

حال در قطعه BC داریم:

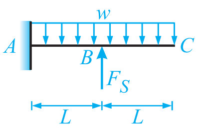


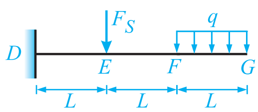
$$\Rightarrow \Delta_F=\frac{V\times(\frac{L}{۲})^۳}{۳\times(۲EI)}+\frac{(V\times\frac{L}{۲})\times(\frac{L}{۲})^۲}{۲\times(۲EI)}$$

$$\Rightarrow \Delta_F=(\frac{۱}{۴۸}+\frac{۱}{۳۲})\frac{VL^۳}{EI}=\frac{۵}{۹۶}\frac{VL^۳}{EI}=\frac{۵}{۴۸}\Delta$$

۱۹-(۱)

سازه یک درجه نامعین است. نیروی فنر را به‌عنوان مجهول در نظر می‌گیریم. فرض کنیم فنر فشرده می‌شود. بنابراین داریم:





$$\text{رابطه سازگاری}: \Delta_B+\Delta_E=\frac{qL^۴}{۳EI}$$

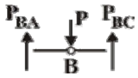
$$ABC: \Delta_B=-\frac{wL^۴}{۸EI}-\frac{wL^۴}{۳EI}-\frac{\frac{wL^۲}{۲}\times L^۲}{۲EI}+\frac{F_s L^۳}{۳EI}\uparrow$$

$$DEFG: \Delta_E=\frac{F_s L^۳}{۳EI}+\frac{qL^۴}{۳EI}+\frac{(qL\times\frac{۳}{۲}L)\times L^۲}{۲EI}\downarrow$$

$$\begin{cases}\Delta_B+\Delta_E=\overbrace{-\dfrac{17}{24}\dfrac{wL^4}{EI}+\dfrac{2F_s L^3}{3EI}+\dfrac{13}{12}\dfrac{qL^4}{EI}}^{\text{میزان کشیدگی فنر}}=-\dfrac{qL^4}{3EI}\Rightarrow\dfrac{w}{q}=\dfrac{50}{17}\\ F_s=\dfrac{qL^4}{3EI}\times\dfrac{3EI}{L^3}=qL\end{cases}$$

۲۰-(۲)

مفصل **B** را مطابق شکل مقابل در نظر می‌گیریم:



$$\sum F_y=0\Rightarrow P_{BA}+P_{BC}=P \qquad (*)$$

از طرفی باید تغییرمکان **B** در عضوهای **AB** و **BC** که به ترتیب تحت بارهای قائم P_{BA} و P_{BC} قرار دارند، باهم برابر باشد با توجه به این عضوها که در شکل‌های زیر به صورت جداگانه نمایش داده شده‌اند، داریم:

$$\Delta_{B_{AB}}=\frac{P_{BA}\times(2L)^3}{3EI}=\frac{8P_{BA}L^3}{3EI}$$

$$\sum M_C=0\Rightarrow M_C=P_{BC}L\Rightarrow\theta_C=\frac{M_C}{K_\theta}=\frac{3P_{BC}L^2}{2EI}$$

$$\Delta_{B_{BC}}=\Delta_{B_1}+\Delta_{B_2}=\frac{P_{BC}L^3}{3(2EI)}+\theta_C\times L_{BC}=\frac{P_{BC}L^3}{6EI}+\frac{3P_{BC}L^3}{2EI}=\frac{5}{3}\frac{P_{BC}L^3}{EI}$$

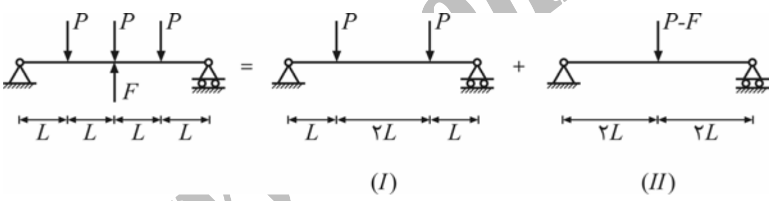
$$\text{رابطه سازگاری}:\Delta_{B_{AB}}=\Delta_{B_{BC}}\Rightarrow\frac{8P_{BA}L^3}{3EI}=\frac{5P_{BC}L^3}{3EI}\Rightarrow\frac{P_{BA}}{P_{BC}}=\frac{5}{8}$$

می‌توان با جایگذاری رابطه اخیر در رابطه **(*)**، P_{BA} و P_{BC} را یافت. اما با توجه به خواسته سوال، نیازی به این کار نیست زیرا:

$$\frac{M_A}{M_C}=\frac{P_{BA}\times 2L}{P_{BC}\times L}=\frac{5}{8}\times 2=\frac{5}{4}$$

۲۱- (۳)

نیروی ایجادشده در فنر را F می‌نامیم. می‌توان تیر داده شده در شکل «ج» را به‌صورت زیر تفکیک کرد:



تغییرمکان قائم وسط تیر سمت چپ از شکل بالا باید با تغییرطول فنر برابر باشد.

$$\Delta_{\text{تیر}}=\Delta_I+\Delta_{II}\quad,\quad \Delta_{\text{فنر}}=\frac{F}{K_s}=\frac{F}{\frac{EI}{5L^3}}=\frac{5FL^3}{EI}$$

$$\begin{cases}\Delta_I=\dfrac{11PL^3}{6EI}\\ \Delta_{II}=\dfrac{4(P-F)L^3}{3EI}\end{cases}\Rightarrow\quad \Delta_{\text{تیر}}=\frac{11PL^3}{6EI}+\frac{4(P-F)L^3}{3EI}$$

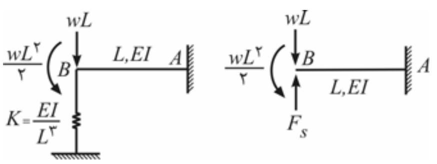
$$\text{رابطه سازگاری}:\Delta_{\text{تیر}}=\Delta_{\text{فنر}}\Rightarrow\frac{11PL^3}{6EI}+\frac{4(P-F)L^3}{3EI}=\frac{5FL^3}{EI}\Rightarrow F=\frac{P}{2}$$

۲۲- (۴)

در سازه‌هایی که گره‌ها امکان تغییرمکان جانبی ندارند و نیرو بر روی گره‌ها اثر می‌کند، عملاً اعضاء خرپایی عمل می‌کنند، در این سؤال این وضعیت رخ داده و BC عملکرد خرپایی دارد و لنگر C در آن صفر است.

۲۳-(۱)

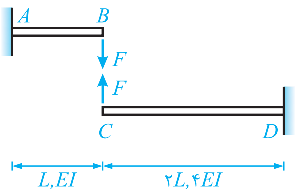
سازه نامعین است و برای محاسبهٔ نیروی فنر از روش نرمی استفاده می‌کنیم، ابتدا بارگذاری قسمت طره‌ای را به محل فنر انتقال می‌دهیم و با در نظر گرفتن نیروی فنر بعنوان مجهول،



شرط سازگاری برابری تغییر مکان فنر و نقطه B خواهد بود (تغییر مکان به سمت پایین مثبت فرض شده است):

$$\begin{cases} \downarrow \delta_B = \dfrac{(wL-F_s)\,L^۳}{۳\,EI} + \dfrac{(\frac{wL^۲}{۲})\,L^۲}{۲\,EI} \\ \downarrow \delta_{\text{فنر}} = \dfrac{F_s}{K} = \dfrac{F_s L^۳}{EI} \end{cases} \xrightarrow[\text{سازگاری}]{\delta_B = \delta_{\text{فنر}}} F_s = \dfrac{۷}{۱۶}\,wL$$

۲۴- (۳)



برای اتصال تیرها در نقاط B و C دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت را مطابق شکل زیر درنظر گرفته و معادلهٔ سازگاری به صورت زیر تعریف می‌شود:

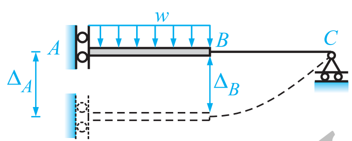
معادلهٔ سازگاری : B و C میزان نزدیک شدن $= \delta = ۰/۰۱L$

در ادامه با استفاده از روابط حفظی داریم:

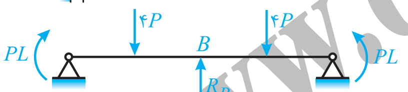
$$\begin{cases} \Delta_B = \dfrac{F\times L^۳}{۳\,EI} \\ \Delta_C = \dfrac{F\,(۲L)^۳}{۳\,(۴\,EI)} \end{cases} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله سازگاری}} \dfrac{FL^۳}{۳\,EI} + \dfrac{F\,(۲L)^۳}{۳\,(۴\,EI)} = \delta = ۰/۰۱\,L \;\Rightarrow\; F = ۰/۰۱\times\dfrac{EI}{L^۲}$$

عکس‌العمل تکیه‌گاهی در A $\;\Rightarrow\; R_A = ۰/۰۱\times\dfrac{EI}{L^۲} \;,\; M_A = ۰/۰۱\times\dfrac{EI}{L}$

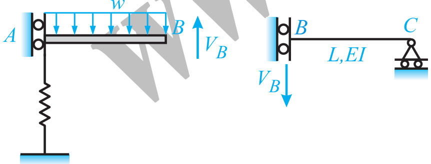
۲۵- (۳)



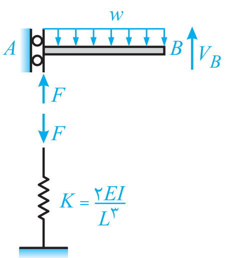
تیر مورد نظر یک درجه نامعین است. تحت بارگذاری نشان داده شده و با توجه به صلب بودن قطعه AB این تیر مطابق شکل زیر تغییر شکل می‌دهد. $\Delta_A = \Delta_B$



بنابراین و با توجه به اینکه در نقطه A و B شیب صفر است، می‌توانیم تیر BC را به شکل زیر در نظر بگیریم.



حال اگر نیروی ایجاد شده در فنر را به عنوان مجهول فرضی در نظر بگیریم شرط سازگاری یکسان بودن تغییر مکان نقطهٔ A با تغییر مکان فنر می‌باشد. از آن جا که تغییر مکان نقطهٔ A با نقطهٔ B برابر است، داریم:



$$\sum F_y = ۰ \;\Rightarrow\; V_B = WL - F$$

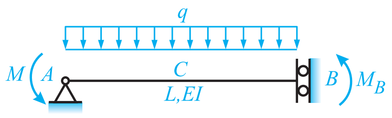
$$\begin{cases} \Delta_A = \Delta_B = \dfrac{V_B\,L^۳}{۳\,EI} = \dfrac{(WL-F)\,L^۳}{۳\,EI} \\ \Delta_{\text{فنر}} = \dfrac{F}{\frac{۲\,EI}{L^۳}} \end{cases} \Rightarrow \Delta_A = \Delta_{\text{فنر}} \quad \text{(رابطهٔ سازگاری)}$$

$$\Rightarrow \dfrac{(wL-F)\,L^۳}{۳\,EI} = \dfrac{F\,L^۳}{۲\,EI} \;\Rightarrow\; F = ۰/۴\,wL$$

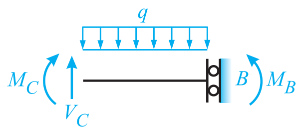
۲۶- (؟)

سازه یک درجه نامعین است. نیروی فنر پیچشی را به‌عنوان مجهول در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\text{شرط سازگاری}:\ \theta_A = \theta_{\text{فنر}}$$



$$\begin{cases} \theta_A = \dfrac{qL^3}{3EI} - \dfrac{ML}{EI} \\ \theta_{\text{فنر}} = \dfrac{ML}{EI} \end{cases} \Rightarrow \theta_A = \theta_{\text{فنر}} \Rightarrow \frac{qL^3}{3EI} = \frac{2ML}{EI} \Rightarrow M = \frac{1}{6}qL^2$$



$$AB\ \text{تعادل}:\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{2} - \frac{1}{6}qL^2 - M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{1}{3}qL^2$$

$$BC\ \text{تعادل قطعه}:\ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_C = \frac{qL}{2}$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_C = \frac{qL^2}{3} - \frac{qL^2}{4} = \frac{1}{12}qL^2$$

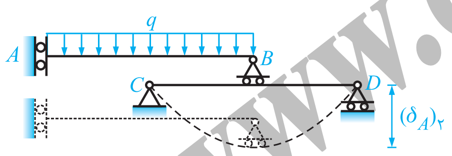
$$\left.\begin{aligned} \delta_{C/B} &= \frac{-q(\frac{L}{2})^4}{8EI} + \frac{(q\frac{L}{2})(\frac{L}{2})^3}{3EI} + \frac{\frac{1}{12}qL^2(\frac{L}{2})^2}{2EI} = \frac{3}{128}\frac{qL^4}{EI} \uparrow \\ \delta_{B/A} &= \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{ML^2}{2EI} = \frac{5qL^4}{24EI} - \frac{1}{12}\frac{qL^4}{EI} = \frac{1}{8}\frac{qL^4}{EI} \downarrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{C/A} = (\frac{1}{8} - \frac{3}{128})\frac{qL^4}{EI} = \frac{3}{128}\frac{qL^4}{EI}$$

۲۷- (۴)

تغییر مکان نقطهٔ A ناشی از ۱- تغییر شکل خمشی عضو AB و ۲- تغییر مکان تکیه‌گاه B که ناشی از تغییر شکل خمشی تیر CD است، می‌باشد. بنابراین در دو مرحله میزان تغییر مکان نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ اول: با فرض عدم تغییر شکل خمشی تیر CD، نقطهٔ B در امتداد قائم جابه‌جا نشده و تیر AB شرایط تیر لغزنده گیردار را خواهد داشت. بنابراین داریم:

$$(\delta_A) = \frac{5qL^4}{24EI}$$



مرحلهٔ دوم: با فرض عدم تغییر شکل خمشی تیر AB این تیر مانند عضو صلب رفتار می‌کند. در این صورت عکس‌العمل ایجاد شده در نقطهٔ B باعث ایجاد تغییر مکان در تیر CD و در نتیجه جابه‌جایی نقطهٔ A خواهد شد. بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$AB\ \text{تعادل تیر}: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_B = qL$$

$$(\delta_A)_2 = \frac{PL^3}{48EI} = \frac{(qL)L^3}{48EI} = \frac{qL^4}{48EI}$$: تیر دو سر مفصل CD تحت بار متمرکز در وسط دهانه

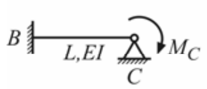
در نهایت تغییر مکان نقطهٔ A در حالت کلی برابر است با:

$$\delta_A = (\delta_A)_1 + (\delta_A)_2 = \frac{5qL^4}{24EI} + \frac{qL^4}{48EI} = \frac{11}{48}\frac{qL^4}{EI}$$

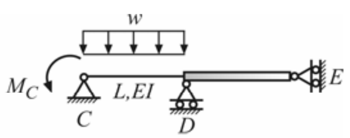
۲۸- (۴)

در این سازه به دلیل وجود تکیه‌گاه لغزنده در A و صلب بودن عضو AB، گره B هیچ‌گونه تغییر شکلی (تغییرمکان و دوران) نخواهد داشت و این گره به صورت گیردار عمل می‌کند. از طرفی نقطهٔ D نیز مانند یک تکیه‌گاه مفصلی عمل می‌کند. (چرا؟)

توجه: دوران سمت چپ و راست گره C یکسان است.



(۱)

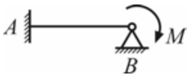


(۲)

$$(\theta_C)_1 = \frac{M_C L}{4EI} \qquad (\theta_C)_2 = \frac{wL^3}{24EI} - \frac{M_C L}{3EI}$$

$$(\theta_C)_۱ = (\theta_C)_۲ \Rightarrow \frac{M_C L}{۴EI} = \frac{wL^۳}{۲۴EI} - \frac{M_C L}{۳EI} \Rightarrow M_C = \frac{wL^۲}{۱۴} \Rightarrow M_B = \frac{M_C}{۲} = \frac{wL^۲}{۲۸}$$

نکته: در تیر زیر، لنگر تکیه‌گاه A برابر $\frac{M}{۲}$ است.



$$M_A = \frac{M}{۲}$$

آزمون ششم

۱- (۳)

ستون‌ها مانند فنرهای موازی عمل می‌کنند. به همین علت برش ایجاد شده در هر یک از ستون‌ها، به نسبت سختی آنها بوده و بر این اساس، نسبت خواسته شده به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{M_A}{M_B}=\frac{V_A\times L_{AC}}{V_B\times L_{BH}}=\frac{V_A\times 4}{V_B\times 2}=\frac{V_A}{V_B}\times 2=\frac{K_{AC}}{K_{BH}}\times 2=\frac{\frac{3EI}{4^3}}{\frac{3EI}{2^3}}\times 2=(\frac{1}{2})^3\times 2=\frac{1}{4}$$

۲- (۳)

تغییرمکان قائم وسط تیرهای **AC** و **BD** و میزان فشردگی فنر انتقالی باهم برابر است. بنابراین این ۳ عضو مثل فنرهای موازی عمل نموده و نیروی **P** به نسبت سختی انتقالی بین آنها توزیع می‌شود.

$$\text{AC و BD سختی انتقالی}=\frac{192EI}{(2L)^3}=\frac{24EI}{L^3}$$

$$F_{\text{فنر}}=P\times\frac{K_{\text{فنر}}}{\sum K_{\text{انتقالی}}}=P\times\frac{\frac{12EI}{L^3}}{2\times\frac{24EI}{L^3}+\frac{12EI}{L^3}}=\frac{P}{5}$$

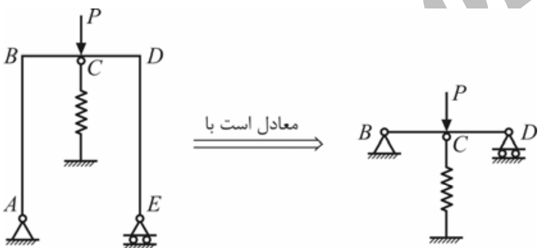
۳- (۱)

با توجه به اینکه تغییرمکان گره B در سه تیر AB، BC و DE یکسان است، لذا این سه تیر مانند سه فنر موازی عمل کرده و داریم:

$$\frac{F_{DBE}}{F_{BC}}=\frac{K_{DBE}}{K_{BC}}=\frac{\frac{192EI}{8L^3}}{\frac{3\times(2EI)}{L^3}}=4\Rightarrow\frac{M_E}{M_C}=\frac{F_{DBE}\times\frac{2L}{8}}{F_{BC}\times L}=4\times\frac{1}{4}=1$$

۴- (۲)

باتوجه به صفر بودن عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه‌های A و E، لنگر خمشی در B و D صفر است. بنابراین BD مثل یک تیر دوسر مفصل عمل می‌کند.



از آنجایی که تغییرمکان قائم C از تیر با میزان فشردگی فنر برابر است، لذا این دو عضو مثل فنرهای موازی عمل نموده و بار P به نسبت سختی انتقالی بین تیر BCD و فنر توزیع می‌شود. سختی انتقالی تیر BCD، $\frac{48EI}{L^3}$ می‌باشد.

$$F_{\text{فنر}}=P\times\frac{K_{\text{فنر}}}{K_{\text{فنر}}+K_{\text{تیر}}}=P\times\frac{\frac{48EI}{L^3}}{\frac{48EI}{L^3}+\frac{48EI}{L^3}}=\frac{P}{2}$$

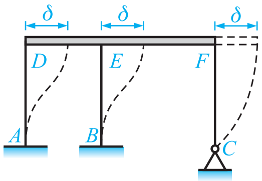
۵- (۲)

دوران **N** از اعضای **MN** و **NO** باهم برابر است. بنابراین این دو عضو مانند فنرهای موازی عمل نموده و سختی دورانی مجموعه برابر مجموع سختی دورانی این دو عضو است. بنابراین داریم:

$$\theta_N=\frac{Q}{\sum K}=\frac{Q}{\frac{4EI}{\frac{A}{2}}+\frac{3EI}{A}}=\frac{QA}{11EI}$$

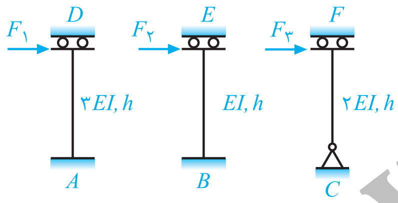
۶- (۴)

باید توجه داشت که در قاب نشان داده شده تغییر مکان انتهای ستون‌ها که به سقف صلب متصل هستند با هم برابر است و تغییر شکل فرضی تاب را می‌توان به صورت زیر نشان داد:



در این شرایط ستون‌ها به صورت فنرهای موازی رفتار می‌کنند و نیروی P به نسبت سختی خمش بین آن‌ها توزیع خواهد شد. بنابراین برای محاسبهٔ مهم هر کدام از نیروی P ابتدا سختی هر کدام را محاسبه می‌کنیم، توجه دارید که ستون‌های A و B به صورت زیر مدلسازی می‌شوند. با فرض $k=\frac{EI}{h^۳}$ داریم:

$$\begin{cases} k_{AD}=\frac{۱۲(۳EI)}{h^۳}=۳۶\frac{EI}{h^۳}=۳۶k \\ k_{EB}=\frac{۱۲EI}{h^۳}=۱۲k \\ k_{CF}=\frac{۳(۲EI)}{h^۳}=۶\frac{EI}{h^۳}=۶k \end{cases} \Rightarrow K_{eq}=k_{AD}+k_{BE}+k_{CF}=۳۶k+۱۲k+۶k=۵۴k$$



در ادامه سهم هر یک از ستون‌های AD و BE از نیروی P برابر است با:

$$\begin{cases} F_{AD}=\frac{k_{AD}}{k_{eq}}\times p=\frac{۳۶k}{۵۴k}\times P=\frac{۲}{۳}P \\ F_{BE}=\frac{k_{BE}}{k_{eq}}\times p=\frac{۱۲k}{۵۴k}=\frac{۲}{۹}p \end{cases}$$

و در نهایت لنگر در پای ستون‌ها برابر است با:

$$\begin{cases} M_A=\frac{۱}{۲}F_{AD}\times h=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۳}p\times h=\frac{ph}{۳} \\ M_B=\frac{۱}{۲}F_{BE}\times h=\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۹}p\times h=\frac{ph}{۹} \end{cases}$$

۷- (۳)

تیر ABC از دو تیر طره‌ای شکل AC و BC که در نقطهٔ C به هم متصل شده‌اند، تشکیل شده است. با توجه به بارگذاری و هندسه تیر می‌توان گفت، تغییر مکان انتهای تیر طره (نقطه C) با هم یکسان بوده و این تیرها مانند دو فنر موازی رفتار می‌کنند. بنابراین می‌توان برای تحلیل آن‌ها از مدلسازی با فنر استفاده کرد. بدین منظور ابتدا سختی هر کدام و سپس سختی کل معادل را بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} k_{AC}=\frac{۳\times(۲EI)}{(۲L)^۳}=\frac{۶}{۸}\frac{EI}{L^۳}=\frac{۳}{۴}\frac{EI}{L^۳}=\frac{۳}{۴}\frac{EI}{L^۳} \\ k_{BC}=\frac{۳\times(EI)}{L^۳}=۳\frac{EI}{L^۳}=۳k \end{cases} \Rightarrow k_{eq}=k_{AC}+k_{BC}=\frac{۱۵}{۴}k=\frac{۱۵}{۴}\frac{EI}{L^۳}$$

در این صورت تغییر مکان محل اثر بار P (نقطهٔ C) برابر است با:

$$\Delta_C=\frac{P}{k_{eq}}=\frac{P}{\frac{۱۵}{۴}\frac{EI}{L^۳}}=\frac{۴}{۱۵}\frac{PL^۳}{EI}$$

در همین لحظه می‌توان گزینهٔ (۳) را به عنوان پاسخ تمرین در نظر گرفت. ما برای تمرین لنگر خمشی و تکیه‌گاه A را نیز بدست می‌آوریم. بدین منظور ابتدا سهم تیر AC از بار p را بدست می‌آوریم.

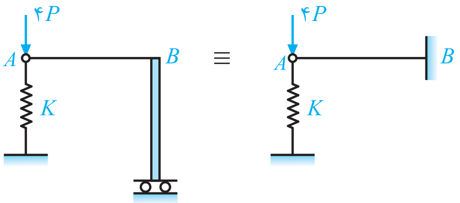
$$k_i=\frac{k_i}{k_{eq}}\times p \Rightarrow F_{AC}=\frac{k_{AC}}{k_{eq}}\times P=\frac{\frac{۳}{۴}k}{\frac{۱۵}{۴}k}\times p=\frac{۱}{۵}p$$

درنهایت لنگر خمشی تکیه‌گاه A برابر است با:

$M_A = F_{AC}\times ۲L = \frac{۱}{۵}P\times ۲L = \frac{۲}{۵}PL$

۸- (۴)

ابتدا باید توجه کرد با توجه به تکیه‌گاه D، در قطعهٔ ACD تمامی نیروی قائم توسط مفصل A تحمل می‌شود که با یک تعادل در راستای قائم به‌سادگی قابل محاسبه است. از طرفی در نقطه A هیچ لنگری به سمت راست منتقل نمی‌شود. همچنین عضو صلب هیچ‌گونه حرکتی نخواهد داشت و گره B به صورت گیردار عمل می‌کند. بنابراین سازه به شکل زیر تبدیل می‌شود:



نیروی قائم وارد به مفصل خمشی $= ۲P + P + P = ۴P$

مطابق شکل و تغییرمکان قائم نقطه A در تیر AB با میزان فشردگی فنر برابر است عضو AB و فنر به‌صورت موازی به هم متصل شده‌اند و... بنابراین برای محاسبهٔ تغییر مکان فنر ابتدا سختی معادل کل سازه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} k_{\text{فنر}} = \frac{۵EI}{L^۳} = ۵k \\ k_{AB} = \frac{۳EI}{L^۳} = ۳k \end{cases} \Rightarrow k_{eq} = \Sigma k = ۵k + ۳k = ۸k$$

$$\Delta_{\text{فنر}} = \frac{F}{k_e} = \frac{۴P}{۸k} = \frac{۴p}{۸\frac{EI}{L^۳}} = \frac{PL^۳}{۲EI}$$

بنابراین گزینهٔ (۴) صحیح است.

۹- (۳)

عضو صلب **CD** تغییرطول نمی‌دهد. بنابراین اگر **C** به اندازه Δ پایین بیاید، **D** نیز به همین اندازه (یعنی Δ) پایین می‌آید. لذا تغییرمکان قائم **C** و **D** برابر است و می‌توان این دو تیر را مانند فنرهای موازی در نظر گرفت. سختی انتقالی این تیرها در سوال ۳ ز همین فصل برابر $\frac{۴۸EI}{L^۳}$ ذکر شده است.

$$\Delta_C = \Delta_D = \frac{P}{\sum K_{\text{انتقالی}}} = \frac{P}{\frac{۴۸EI}{(۲L)^۳} + \frac{۴۸(۲EI)}{(۲L)^۳}} = \frac{PL^۳}{۱۸EI}$$

۱۰- (۴)

ابتدا باید توجه داشته باشید که در سازه نشان داده شده به دلیل وجود عضو صلب، تغییر مکان تمام نقاط متصل به آن با هم برابر است.به عبارت دیکر تمام ستون‌ها و اعضای مورب خرپایی و فنر انتقالی به صورت فنرهای موازی به هم متصل شده‌اند. بنابراین می‌توانیم برای تحلیل آن از روابط فنرهای موازی کمک بگیریم. بدین منظور ابتدا سختی هر یک از اعضا را در امتداد محور افق محاسبه نماییم. قبل از آن توجه داشته باشید که اعضای FJ ، DH، GO و FN با حرکت جسم صلب به راحتی جابه‌جا می‌شوند و ممانعتی در برابر حرکت ندارند و تنها به صورت صلب جابه‌جا می‌شوند. بنابراین سختی در برابر حرکت درراستای افق ندارند.

$$\begin{cases} k_{GK} = k_{EI} = k_{EM} = \frac{۳EI}{L^۳} = ۳k \\ k_{DL} = \frac{۱۲EI}{L^۳} = ۱۲k \\ k_{CA} = k_{CB} = \frac{EA}{L}\cos^۲\theta = \frac{\frac{\sqrt{۲}EI}{L^۲}}{L\sqrt{۲}}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{EI}{L^۳} = \frac{k}{۲} \\ k_{\text{فنر}} = \frac{۲EI}{۱L^۳} = ۲k \end{cases}$$

$$\Rightarrow k_{eq} = \sum k = ۳\times ۳k + ۱۲k + ۲\times\frac{k}{۲} + ۲k = ۲۴k$$

در ادامه با توجه به اینکه تغییر مکان تکیه گاه غلتکی H با تغییر مکان عضو صلب برابراست کافی است از رابطه $\Delta = \frac{F}{k}$ مقدار تغییر مکان کل

سیستم را محاسبه کنیم. فقط باید توجه داشته باشید که قبل از محاسبهٔ Δ باید نیروی $3P$ که در نقطه O داده شده است را بـه نقطـه G انتقـال دهید که در این صورت مجموع بار گذاری واردبر سازه $4P$ خواهد بود و داریم:

$$\Delta_H=\frac{F}{k_{eq}}=\frac{4P}{24k}=\frac{4p}{24\frac{EI}{L^3}}=\frac{PL^3}{6EI}$$

۱۱– (۱)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{تیر ۱}: u_1=\int_0^L \frac{M^2dx}{2EI}=\frac{M^2L}{2EI}\\ \text{تیر ۲}: u_2=\int_0^{2L} \frac{M^2dx}{2\times(2EI)}=\frac{4M^2L}{2EI}\end{array}\right. \Rightarrow \frac{u_2}{u_1}=4$$

۱۲–(۲)

در حالت اول داریم:

$$u_1=\int_0^{2L}\frac{M(x)^2dx}{2EI}+\frac{R_A^2}{2K_1}+\frac{R_C^2}{2K_2}$$

$$\Rightarrow\ u_1=\frac{P^2}{2\times\frac{48EI}{8L^3}}+\frac{P^2}{8k_1}+\frac{P^2}{8k_2}=\frac{13}{48}\frac{P^2L^3}{EI}$$

در حالت دوم:

$$u_2=\int_0^{2L}\frac{M(x)^2dx}{2EI}+\frac{R_A^2}{2k_1'}+\frac{R_C^2}{2k_2'}$$

$$\Rightarrow\ u_2=\frac{P^2}{2\times\frac{48EI}{8L^3}}+\frac{P^2}{16k_1}+\frac{P^2}{4k_2}=\frac{35}{96}\frac{P^2L^3}{EI}\ \Rightarrow\ \frac{u_2}{u_1}=\frac{35}{26}$$

۱۳–(۴)

برای محاسبه انرژی ذخیره شده در سازه، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$U=\sum\int\frac{M^2}{2EI}dx+\frac{F_s^2}{2k_s}+\frac{M^2}{2k_\theta}$$

(لنگر BC ثابت است) $M_{BC}=\frac{wL^2}{2}$ $\quad F_s=wL \quad k_s=\frac{1}{f}=\frac{EI}{L^3}$

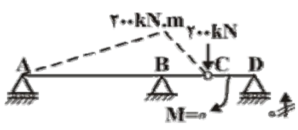
بنابراین با توجه به مقادیر لنگر خمشی در فاصله BC و نیروی فنر داریم:

$$U=\int_0^L\frac{(\frac{wL^2}{2})^2}{2EI}dx+\frac{(wL)^2}{2\frac{EI}{L^3}}=\frac{w^2L^5}{8EI}+\frac{w^2L^5}{2EI}=\frac{5w^2L^5}{8EI}$$

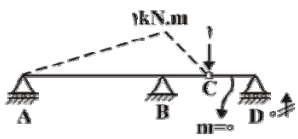
توجه: دقت شود که انرژی قسمت صلب به‌دلیل بی‌نهایت بودن سختی آن، صفر است.

۱۴–(۴)

کافیست Δ_C را در راستای قائم بیابیم. با استفاده از روش بار واحد این مقدار را می‌یابیم:



(سازه اصلی)



(سازه واحد)

$$\Delta_C\times1=\sum\int\frac{M(x)m(x)dx}{EI}=\left(\frac{A_M\cdot\bar{m}}{EI}\right)_{BC}+\left(\frac{A_M\cdot\bar{m}}{EI}\right)_{AB}$$

$$\Delta_C=\frac{(\frac{1}{2}\times200\times1\times\frac{2}{3})}{EI}+\frac{(\frac{1}{2}\times200\times3\times\frac{2}{3})}{EI}=\frac{80}{3}\times10^{-3}(m)$$

$$E=\frac{۱}{۲}P\times\Delta=\frac{۱}{۲}\times۲۰۰\times۱۰^{۳}\times\frac{۸۰}{۳}\times۱۰^{-۶}=\frac{۸۰}{۳}\ \text{KN.m}$$

(۴)-۱۵

نکته: انرژی ذخیره شده در یک عضو خمشی تحت اثر دوران‌های گرهی دو انتها و جابه‌جایی دو انتهای آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$U_{ij}=\frac{۲EI}{L}[\theta_i^{۲}+\theta_i\theta_j+\theta_j^{۲}-\frac{۳}{L}(\theta_i+\theta_j)(\Delta_{ij})+\frac{۳}{L^{۲}}(\Delta_{ij})^{۲}]$$

بنابراین انرژی کرنشی در اعضاء AB و BC به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$[\theta_A=۰\ ,\ \theta_B=-۰/۰۱\ ,\ \Delta_{AB}=۰/۰۲L$ (عضو AB خلاف جهت عقربه‌ها دوران کرده است)]

$$U_{AB}=\frac{۲EI}{L}[۰+۰+(-۰/۰۱)^{۲}-\frac{۳}{L}(۰+(-۰/۰۱))(-۰/۰۲L)+\frac{۳}{L^{۲}}(-۰/۰۲L)^{۲}]=\frac{۱۴\times۱۰^{-۴}EI}{L}$$

$[\theta_C=۰\ ,\ \theta_B=-۰/۰۱\ ,\ \Delta_{CB}=۰/۰۱L$ (عضو BC در جهت عقربه‌ها دوران کرده است.)]

$$U_{BC}=\frac{۲EI}{L}[۰+۰+(-۰/۰۱)^{۲}-\frac{۳}{L}(۰+(-۰/۰۱))\times(۰/۰۱L)+\frac{۳}{L^{۲}}(۰/۰۱L)^{۲}]=\frac{۱۴\times۱۰^{-۴}EI}{L}$$

$$U=U_{AB}+U_{BC}=\frac{۲۸\times۱۰^{-۴}EI}{L}$$

(۴)-۱۶

طبق قضیه دوم کاستگلیانو، مشتق تابع انرژی نسبت به نیروهای خارجی متمرکز وارد شده بر سازه، برابر جابجایی محل اثر آن نیرو است. بنابراین برای عکس‌العمل قائم **(X)C** و لنگر خمشی **(Y)A**، داریم:

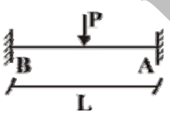
$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial X}=\Delta_{C_y}=۰\Rightarrow\dfrac{۴\times X^{۳}}{۳EI}-\dfrac{RL^{۳}}{۶EI}=۰\Rightarrow X=\dfrac{R}{۸}\\[2mm]\dfrac{\partial U}{\partial Y}=\theta_A=۰\Rightarrow\dfrac{YL}{EI}-\dfrac{L^{۲}R}{۲EI}=۰\Rightarrow Y=\dfrac{LR}{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{X}{Y}=\frac{\frac{R}{۸}}{\frac{LR}{۲}}=\frac{۱}{۴L}$$

(۳)-۱۷

اگر **U** انرژی کرنشی داخلی تیر تحت بار **P** باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial U}{\partial X}=۰ & \text{: برای می نیمم شدن انرژی}\\[2mm]\dfrac{\partial U}{\partial X}=\theta_A & \text{: طبق قضیه دوم کاستگلیانو}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta_A=۰$$

اگر شیب تیر در **A** صفر شود، این تکیه گاه مثل یک تکیه گاه گیردار عمل نموده و لنگر آن، لنگر گیرداری تیر دوسرگیردار است.



$$M_A=X=\frac{PL}{۸}$$

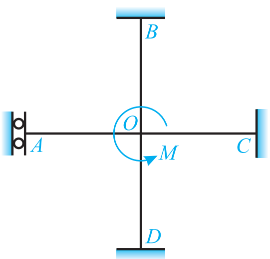
(؟)-۱۸

$$\frac{\partial U}{\partial X}=۰\ \text{: برای حداقل شدن انرژی سازه}$$

از طرفی با توجه به قضیه کاستیلیانو می‌دانیم مشتق تابع انرژی نسبت به لنگر در یک نقطه، شیب در همان نقطه را می‌دهد، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial U}{\partial X}=\theta_D=۰\ \Rightarrow\ \theta_D=۰$$

بنابراین انرژی ذخیره شده در سازه وقتی حداقل می‌گردد که دوران تکیه‌گاه D برابر صفر شود، یعنی این تکیه‌گاه به‌صورت گیردار عمل کند. در ادامه با فرض گیردار بودن این تکیه‌گاه، سازه را تحلیل می‌کنیم. در سازهٔ جدید اعضاء OD ، OC و OB و OA به‌صورت سه فنر موازی عمل کرده و در ادامه لنگر این تکیه‌گاه گیردار فرضی را به‌دست می‌آوریم:



$$M_{OD}=\frac{\frac{۴EI}{L}}{۳\times\frac{۴EI}{L}+\frac{EI}{L}}\times M=\frac{۴}{۱۳}M$$

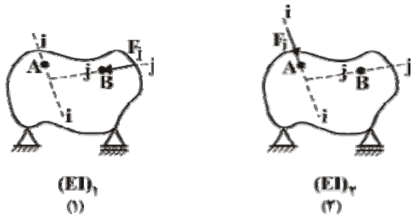
با توجه به نکات تحلیل سازه‌های نامعین داریم:

$$M_D=\frac{۱}{۲}\times M_{OD}=\frac{۲}{۱۳}M$$

(۱)-۱۹

نکته: هرگاه **EI** (سختی خمشی اعضا) در سازه‌های مربوط به قضیه بتی ـ ماکسول باهم متفاوت باشد، رابطه این قضیه به صورت کلی‌تر زیر تبدیل خواهد شد:

$$\Delta_{A(۱)} \times F_{i(۲)} \times EI_۱ = \Delta_{B(۲)} \times F_{j(۱)} \times EI_۲$$



به عبارت دیگر سختی اعضای هر سازه در تغییرمکان همان سازه ضرب می‌شود.

برای این سوال داریم:

$$M_{A(۱)} \times \theta_{A(۲)} \times (EI)_۲ = P_{D(۲)} \times \Delta_{D(۱)} \times (EI)_۱$$

$$(-۱۰)\times(+۰/۰۵)\times(۲EI) = P\times(+۶\times۱۰^{-۲})\times EI \rightarrow P = -\frac{۵۰}{۳}ton$$

علامت منفی نشان می‌دهد که مطابق شکل، **P** باید به سمت پایین باشد.

(۴)-۲۰

از قانون بتی ـ ماکسول استفاده می‌کنیم:

[نیرو در **(n)** در راستای **(cd)**] × [دراثر نیروی **(cd)** در راستای **(n)** جابه‌جایی وارد شده در **(m)** در راستای **(ab)**]

= [نیرو در **(m)** در راستای **(ab)**] × [دراثر نیروی **(ab)** در راستای **(m)** جابه‌جایی وارد شده در **(n)** در راستای **(cd)**]

$$۳۰(ton)\times۵(mm) = ۱۰(ton)\times\Delta_m \Rightarrow \Delta_m = ۱۵mm$$

(۳)-۲۱

قضیهٔ بتی - ماکسول برای این خرپا، به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$(\Delta_A)_۱ \times$ نیروی وارد بر سازه (۲) در $A \times (EA)_۱ = (\Delta_B)_۲ \times$ نیروی وارد بر سازه (۱) در $B \times (EA)_۲$

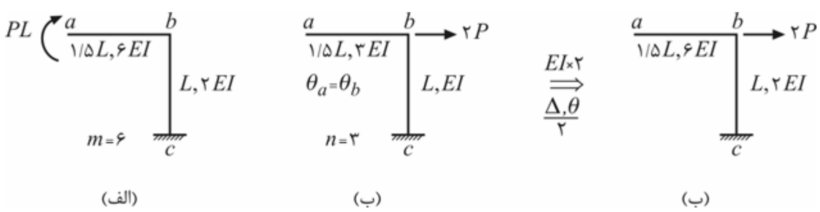
(سازهٔ (۱) سازهٔ الف و سازهٔ (۲)، سازهٔ ب است)

$$۲P\times\Delta_E\times(EA) = (P\times L\sqrt{۲})\times\theta\times۲EA \Rightarrow \Delta_E = L\sqrt{۲}\,\theta$$

(۲) -۲۲

نکته: مقادیر دوران و خیز در نقاط مختلف یک سازه، با صلبیت خمشی آن رابطهٔ معکوس دارد. درحالت کلی در صورتی کـه مشخـصات دو سـازهٔ مورد بررسی با یکدیگر یکسان نباشد، نمی‌توان از قضیه بتی - ماکسول استفاده کرد. اگر صلبیت خمشی دو سازه (۱) و (۲) به ترتیـب mEI و nEI باشد برای استفاده از این قضیه باید صلبیت خمشی دو سازه یکسان شود. با توجه به این موضوع صلبیت خمشی سازهٔ (۲) بایـد $\frac{m}{n}$ برابـر و تغییـر مکان‌های آن سازه $\frac{n}{m}$ برابر شود.

با استفاده از نکته بالا و قضیه بتی داریم:



در سازه (ب):

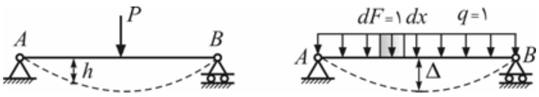
$$PL\times((\theta_a)_{ب}\times\frac{n}{m}) = ۲P\times\Delta_{الف} \quad , \quad (\theta_a)_{ب} = (\theta_b)_{ب}$$

$$PL\times((\theta_b)_{ب}\times\frac{۱}{۲}) = ۲P\times\Delta_{الف} \Rightarrow (\theta_b)_{ب} = \frac{۴\Delta}{L}$$

در سازه (ب) : $(\delta_a)_{ب} = (\theta_b)_{ب}\times۱/۵\,L = \frac{۴\Delta}{L}\times۱/۵\,L = ۶\Delta$

۲۳-(۳)

با توجه به قضیه بتی - ماکسول و در مقایسهٔ تیرهای مقابل داریم:



کار dF تحت تغییرشکل‌های تیر سمت چپ عبارت است از:

$$dW = h \times dF = h \times ۱ \times dx \;\Rightarrow\; W = \int_{۰}^{L} h\,dx = A$$

A مساحت زیر نمودار تغییرشکل تیر سمت چپ است و مقدار آن با کار نیروی P تحت تغییرشکل‌های تیر سمت راست برابر است.

$$A = P \times \Delta = P \times \frac{۵ \times ۱ \times L^{۴}}{۳۸۴\,EI} \;\Rightarrow\; A = \frac{۵\,PL^{۴}}{۳۸۴\,EI}$$

نکته: برای حل این تست می‌توان از روش تیر مزدوج نیز استفاده کرد. همان‌طور که می‌دانیم لنگر در تیر مزدوج معادل تغییرمکان در تیر اصلی است. بنابراین داریم:

مساحت محدود به نمودار تغییرشکل بین دو نقطه A و B = $\int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI}\,dx$

$M(x)$: لنگر در تیر مزدوج

آزمون هفتم

۱- (۲)

از نکته بیان شده در درسنامه داریم:

$$n_\Delta = ۲m + n - p = ۲\times۲ + ۰ - ۳ = ۱$$

۲- (۳)

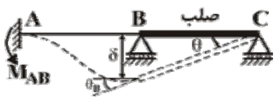
از روش شیب افت استفاده می‌کنیم. با صفر شدن لنگر خمشی در **B**، داریم:

$$M_{BA} = M_{BC} = M_B = ۰$$

$$\begin{cases} M_{BA} = \dfrac{۲EI}{۱/۵L}(۲\theta_B + \theta_A - \dfrac{۳\Delta_{AB}}{۱/۵L}) = ۰ \Rightarrow \Delta_A = \theta_B L \\ M_{BC} = \dfrac{۲EI}{L}(۲\theta_B + \theta_C - \dfrac{۳\Delta_{BC}}{L}) \xrightarrow{\theta_C = -\theta_\circ} \theta_B = \dfrac{\theta_\circ}{۲} \end{cases} \Rightarrow \Delta_A = \frac{۱}{۲}\theta_\circ L$$

علامت مثبت به دست آمده برای Δ_A، نشان می‌دهد که Δ_A باید به سمت بالا باشد

۳- (۱)

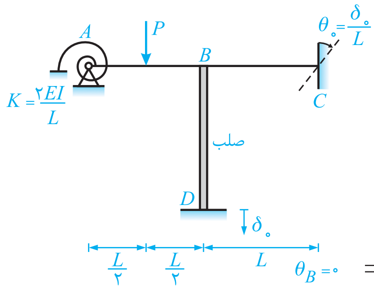


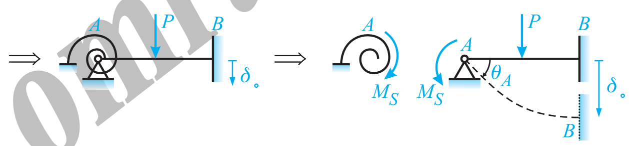
معادله شیب افت را برای تیر **AB** می‌نویسیم:

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_A + \theta_B - \frac{۳\Delta}{L}) = \frac{۲EI}{L}(۲\times۰ - \frac{\delta}{L} - \frac{۳\delta}{L}) = -\frac{۸EI\delta}{L^۲}$$

۴- (۴)

با توجه به عدم حضور تغییر شکل‌های محوری در اعضاء AB و BC، گره B فاقد تغییر مکان افقی بوده و تنها دارای جابه‌جایی قائم به مقدار $\delta_\circ$ می‌باشد. از طرفی به دلیل حضور جسم صلب BD، دوران B نیز صفر است بنابراین قسمت AB را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت: (لنگر در فنر را با M' نمایش می‌دهیم.)





تعادل گره A : $M_{AB} = -M'$

در ادامه معادله شیب افت را برای عضو AB می‌نویسیم:

$$M_{AB} = \frac{۲EI}{L}(۲\overset{\frac{M'}{۲EI}/L}{\boxed{\theta_A}} + \overset{\text{صفر}}{\boxed{\theta_B}} - ۳\overset{\frac{\delta_\circ}{L}}{\boxed{\psi_{AB}}}) + \overset{-\frac{۲L}{۸}}{\boxed{FEM_{AB}}}$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \frac{۲EL}{L}(۲\times\frac{M_S L}{۲EI} - \frac{۳\delta_\circ}{L}) - \frac{PL}{۸}$$

در نهایت معادله تعادل لنگر در نقطه A را نوشته و داریم:

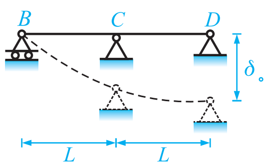
$M_{AB} = -M'$ (پاد ساعتگرد)

$$\Rightarrow M_{AB} = -M' \Rightarrow \frac{۲EI}{L}(۲\times\frac{M'L}{۲EI} - \frac{۳\delta_\circ}{L}) - \frac{PL}{۸} = -M' \Rightarrow M' = \frac{PL}{۲۴} + \frac{۲EI\delta_\circ}{L^۲}$$

۵- (۱)

این سؤال را با دو روش حل می‌کنیم:

۱) روش اول: شیب افت، ابتدا باید توجه کنید به دلیل وجود تکیه‌گاه غلتکی در نقطه A و عدم بارگذاری روی عضو AB، لنگر خمشی در طول این عضو در نتیجه نقطه B صفر است و می‌توان سازه را به صورت مقابل نشان داد.



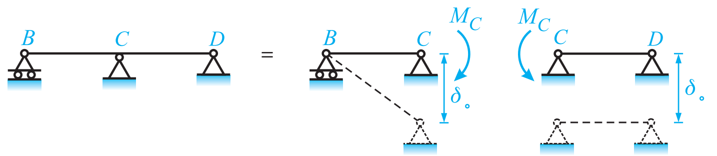
تعادل گره C : $M_{CB} + M_{CD} = ۰$

با استفاده از روابط شیب افت اصلاح شده خواهیم داشت:

$$\begin{cases} M_{CB}=\frac{۳EI}{L}(\theta_C-\Psi_{CB})+FEM'_{CB}=\frac{۳EI}{L}(\theta_C-\frac{\delta_۰}{L}) \\ M_{CD}=\frac{۳EI}{L}(\theta_C-\Psi_{CB})+FEM'_{CD}=\frac{۳EI}{L}(\theta_C-\frac{\delta_۰-۰\delta_۰}{L})=\frac{۳EI}{L}\theta_C \end{cases}$$

تعادل گره C : $M_{CB}+M_{CD}=۰ \Rightarrow \frac{۳EI}{L}(\theta_C-\frac{\delta_۰}{L})+\frac{۳EI}{L}\theta_C=۰ \Rightarrow \theta_C=\frac{\delta_۰}{۲L}$

۲) **روش دوم:** روابط حفظی معین: تیر BCD را از محل نقطهٔ C جدا کرده و لنگر خمشی داخلی در این نقطه را به عنوان مجهول در نظر می‌گیریم.



در این حالت شرط سازگاری یکسان بودن شیب نقطهٔ C در دو تیر است:

$$(\theta_C)_{BC}=(\theta_C)_{CD}$$

بنابراین با استفاده از روابط حفظی تیر دو سر مفصل داریم:

$$(\theta_C)_{BC}=(\theta_C)_{\infty} \Rightarrow \frac{M_C L}{۳EI}+\frac{\delta_۰}{L}=\frac{-M_C L}{۳EI} \Rightarrow M_C=-\frac{۳}{۲}(\frac{EI\delta_۰}{L^۲})$$

در نهایت با مشخص شدن M_C و با توجه به تیر CD داریم:

$$\theta_C=\frac{M_C L}{۳EI}=\frac{-\frac{۳}{۲}\frac{EI\delta_۰}{L^۲}\times L}{۳EI}=-\frac{\delta_۰}{۲L}$$

۶- (۴)

طبق روابط حفظی داریم:

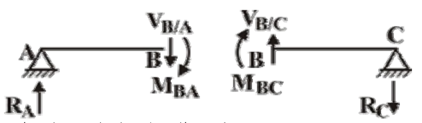
$$M_A=x=\frac{M_۰\times b}{(a+b)^۲}\times(۳a-(a+b))$$

$$M_B=y=\frac{Ma}{(a+b)^۲}\times(۳b-(a+b)) \Rightarrow y-x=\frac{M_۰}{(a+b)^۲}(b^۲-a^۲)=\frac{M_۰}{L}(b-a)$$

۷- (۱)

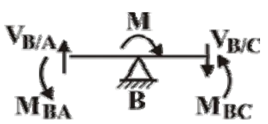
سازه شکل سوال متقارن بوده و بارگذاری روی آن پادمتقارن می‌باشد. لذا باید تمامی نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌ها نیز حالت پادمتقارن نسبت به نقطه **B** داشته باشند. در این وضعیت عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه میانی **B** باید صفر باشد.

به عبارت دیگر اگر در نقطه **B**، سازه را به دو قسمت **AB** و **BC** مطابق شکل تفکیک کنیم، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی بایـد بـه صورت نشان داده شده باشند (جهت نیروها فرضی است)



عکس‌العمل‌ها پادمتقارن‌اند. $\Rightarrow \mathbf{R_A=R_C}$ (مقدار برابر دارند و جهتشان عکس هم است)

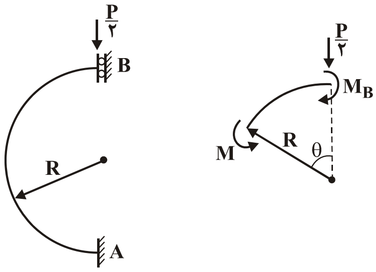
$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{AB:\sum F_y=۰\to V_{BA}=R_A} \\ \mathbf{BC:\sum F_y=۰\to V_{BC}=R_C} \end{array}\right\} \to \mathbf{V_{BA}=V_{BC}}$$



در تکیه‌گاه **B** : $\mathbf{\sum F_y=۰\to R_B=۰}$

۸- (۱)

سازه دارای تقارن محوری با بارگذاری متقارن می‌باشد و نصف سازهٔ آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم:



$$M = \frac{P}{۲}R\sin\theta + M_B$$

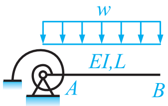
$$\frac{\partial M}{\partial M_B} = ۱$$

$\theta_B = ۰$ (به دلیل تقارن)

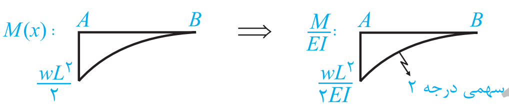
$$\theta_B = \int \frac{M}{EI}\times\frac{\partial M}{\partial M_B}ds \Rightarrow \theta_B = \frac{۱}{EI}\int_۰^{\pi}(\frac{P}{۲}R\sin\theta + M_B)\times ۱\times Rd\theta = ۰ \Rightarrow M_B = \frac{PR}{\pi}$$

۹- (۴)

تیر نشان داده شده متقارن با بارگذاری متقارن است بنابراین نیروی برشی در محل محور تقارن صفر است. با توجه به اینکه لنگر خمشی نیز در محل محور تقارن (نقطهٔ B) صفر است می‌توان تیر را از این نقطه جدا کرد. به عبارت دیگر می‌توان به جای تحلیل تیر فوق از تیر زیر استفاده کرد.



در ادامه و برای محاسبهٔ اختلاف دوران بین نقاط A و B از روش لنگر سطح استفاده می‌کنیم به این منظور لنگر خمشی در نقاط A و B را به دست می‌آوریم و نمودار لنگر خمشی را در فاصلهٔ BC رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} M_B = ۰ \\ M_A = \frac{wL^۲}{۲} \end{cases} \Rightarrow M(x) \qquad \Rightarrow \frac{M}{EI}$$

در نهایت با توجه به قضیه اول لنگر سطح داریم:

$$\theta_{B/A} = \theta_B - \theta_A = \int_۰^L \frac{M(x)}{EI} = \delta_{AB} = \frac{۱}{۳}\times\frac{wL^۲}{۲EI}\times L = \frac{wL^۳}{۶EI}$$

۱۰- (۲)

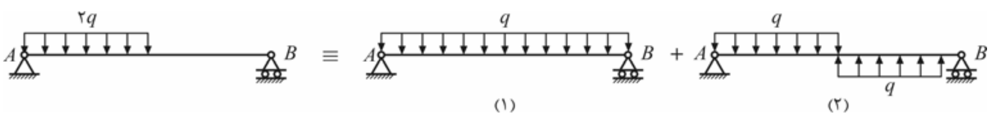
توجه شود که در سازه (ب) تغییرمکان قائم وسط تیر **AB** با تغییرمکان افقی وسط ستون **BC** برابر است. با توجه به قانون بتی ـ ماکسول داریم:

$$P_{(الف)}\times\Delta_{(ب)}\times EI_{(ب)} = M_{(ب)}\times\theta_{(الف)}\times EI_{(الف)} \Rightarrow ۶\times\Delta\times EI = ۱/۸\times ۲\times ۱۰^{-۳}\times ۲EI \Rightarrow \Delta_{BC\ وسط\ (ب)} = ۱/۲mm$$

۱۱- (۲)

تیر CD سازه‌ای متقارن با بارگذاری متقارن است و همان طور که در صورت سؤال ذکر شده است تغییر مکان وسط دهانه آن را $\delta_۲$ در نظر می‌گیریم.

تیر AB را می‌توانیم به دو تیر با بارگذاری متقارن و پادمتقارن مطابق شکل زیر تبدیل کنیم:



تیر شمارهٔ (۲) متقارن با بارگذاری پادمتقارن است و تغییر مکان وسط دهانه آن صفر است. تیر شمارهٔ (۱) نیز همان تیر CD می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تغییر مکان وسط دهانه تیرهای AB و CD یکسان است:

$$\delta_۱ = \delta_۲$$

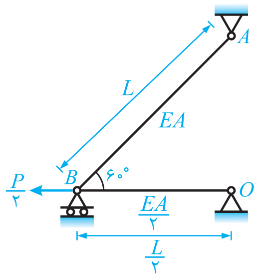
۱۲-(۱)

باتوجه به تقارن سازه، نیروی برشی در نقاط C و D صفر می‌باشد. این مطلب از معادلات $\sum F_y = ۰$ در این گره‌ها نتیجه می‌شود. بنابراین لنگر خمشی در گوشه‌های سازه برابر صفر است و اعضای قائم چپ و راست مانند تیرهای دو سر مفصل عمل می‌کنند و داریم:

$$\Delta_A = \Delta_B = \frac{Ph^۳}{۴۸EI} \Rightarrow \Delta_{AB} = \Delta_A + \Delta_B = \frac{Ph^۳}{۲۴EI}$$

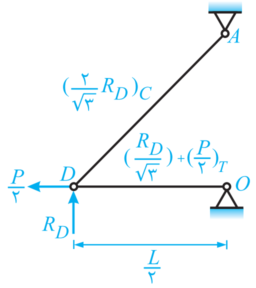
۱۳-(۱)

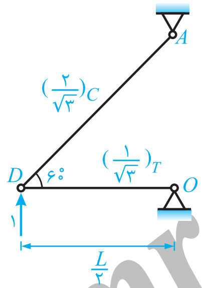
سازه دوبار متقارن است و به شکل مقابل تبدیل می‌شود. این سازه یک درجه نامعین است. عکس‌العمل B را مجهول قرار می‌دهیم. داریم:

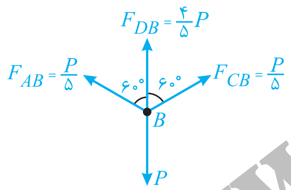


رابطه سازگاری : $\Delta_{Dy} = ۰ \quad (*)$

با استفاده از کار مجازی:





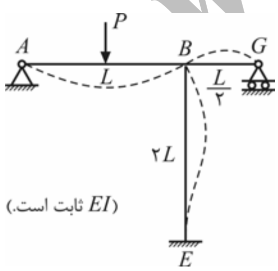


$$\Rightarrow \Delta_{By} = \sum \frac{NnL}{EA} = \frac{۴R_D}{۳} \times \frac{L}{EA} + \left(\frac{R_D}{۳} + \frac{P}{۲\sqrt{۳}}\right)\frac{L}{EA} \overset{(*)}{=} ۰$$

$$\Rightarrow R_D = \frac{\sqrt{۳}}{۱۰}P \Rightarrow \frac{F_{BD}}{F_{AD}} = \frac{\frac{۴}{۵}P}{\frac{۲}{۱۰}P} = ۴$$

۱۴-(۱)

سازه دارای تقارن محوری معکوس می‌باشد و در مدل نصف سازه، از تکیه‌گاه غلتکی در محل محور تقارن استفاده می‌شود.



حال با استفاده از معادلات شیب - افت اصلاح شده، داریم:

$$\begin{cases} M_{BA} = \frac{۱/۵\,EI}{L}(۲\theta_B - ۲\psi_{BA}) + FEM'_{BA} \\ \psi_{BA} = ۰\ ,\ FEM'_{BA} = \frac{۳PL}{۱۶} \end{cases} \Rightarrow M_{BA} = \frac{۱/۵\,EI}{L}(۲\theta_B) + \frac{۳PL}{۱۶}$$

$$\begin{cases} M_{BE} = \frac{۲EI}{۲L}(۲\theta_B + \theta_E - ۳\psi_{BE}) + FEM_{BE} \\ \theta_E = ۰\ ,\ \psi_{BE} = ۰\ ,\ FEM_{BE} = ۰ \end{cases} \Rightarrow M_{BE} = \frac{EI}{L}(۲\theta_B)$$

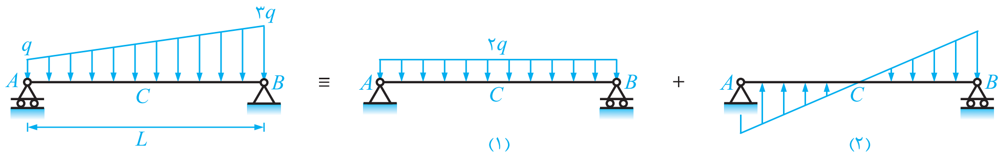
$$\begin{cases} M_{BG} = \frac{۱/۵\,EI}{\frac{L}{۲}}(۲\theta_B - ۲\psi_{BG}) + FEM'_{BG} \\ \psi_{BG} = ۰\ ,\ FEM'_{BG} = ۰ \end{cases} \Rightarrow M_{BG} = \frac{۳EI}{L}(۲\theta_B)$$

با نوشتن تعادل لنگر برای گره B :

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow M_{BA} + M_{BE} + M_{BG} = ۰ \Rightarrow \theta_B = -\frac{۳PL^۲}{۱۷۶EI} \Rightarrow M_{BA} = \frac{۱/۵\,EI}{L}[۲(-\frac{۳PL^۲}{۱۷۶EI})] + \frac{۳PL}{۱۶} = \frac{۳PL}{۲۲}$$

بنابراین M_{BA} برابر با $\frac{۳PL}{۲۲}$ و در جهت عقربه‌های ساعت است.

۱۵–(۳)



سازهٔ (۲) پادمتقارن بوده لذا لنگر C در وسط تیر AB برابر صفر است. لذا:

$$M_C = M_{C(۱)} = \frac{۲q \times L^۲}{۸} = \frac{qL^۲}{۴}$$