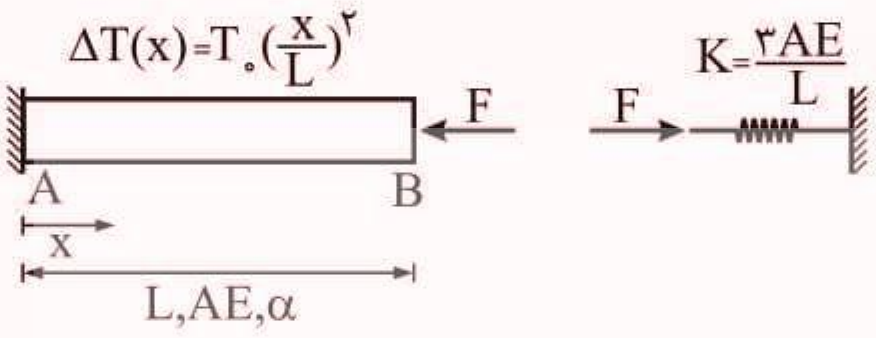
پاسخ تشریحی آزمون فصل اول

۱- (۱) متوسط

اگر در اثر افزایش دمای میلهٔ AB نیروی ایجاد شده در فنر را F به صورت فشاری در نظر بگیریم داریم:



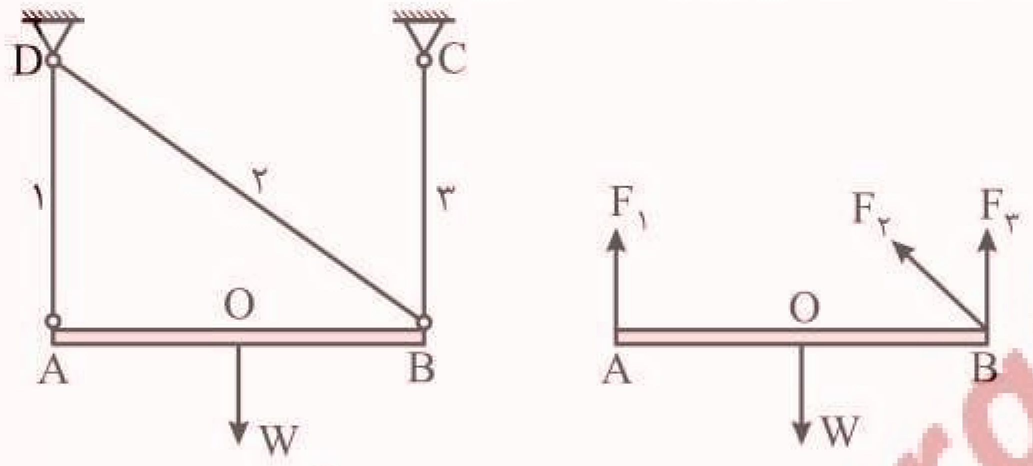
$$\vec{\Delta}_B = \Delta L_{\text{فنر}} \Rightarrow \int_0^L \alpha\Delta T(x)\,dx - \frac{FL}{AE} = \frac{F}{\frac{۳AE}{L}}$$

$$\Rightarrow \int_0^L \alpha T_0(\frac{x}{L})^۲ dx = \frac{۴FL}{۳AE} \Rightarrow \frac{\alpha L T_0}{۳} = \frac{۴FL}{۳AE}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \frac{۱}{۴}AE\alpha T_0}$$

۲- (۱) متوسط

سازه معین بوده و برای یافتن تغییر شکل‌های آن ابتدا نیروی اعضای آن را به دست می‌آوریم .



$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_۲ = ۰$$

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow F_۳ = \frac{w}{۲}$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_۱ = \frac{w}{۲}$$

در ادامه با داشتن مقادیر نیروی داخلی در هر عضو تغییر طول آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\Delta L_۱ = \frac{F_۱ L}{AE} = \frac{۳wL}{۲AE} \Rightarrow \Delta_{Ay} = \frac{۳wL}{۲AE}$$

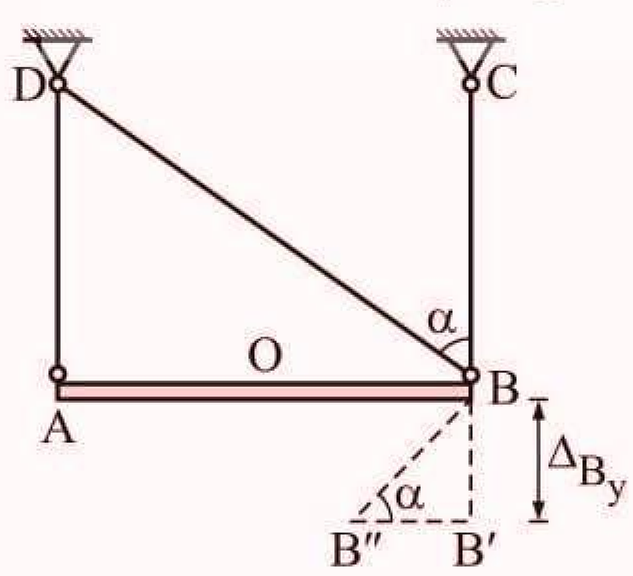
$$\Delta L_۲ = ۰$$

$$\Delta L_۳ = \frac{F_۳ L}{AE} = \frac{۳wL}{۲AE} \Rightarrow \Delta B_y = \frac{۳wL}{۲AE}$$

برای محاسبهٔ جابه جایی قائم O نقطهٔ میانی عضو صلب داریم:

$$\Delta_{oy} = \frac{\Delta_{Ay} + \Delta_{By}}{۲} = \frac{۳wL}{۲AE}$$

از طرفی برای محاسبهٔ تغییر مکان افقی O از جابه جایی افقی مفصل B استفاده می‌کنیم.

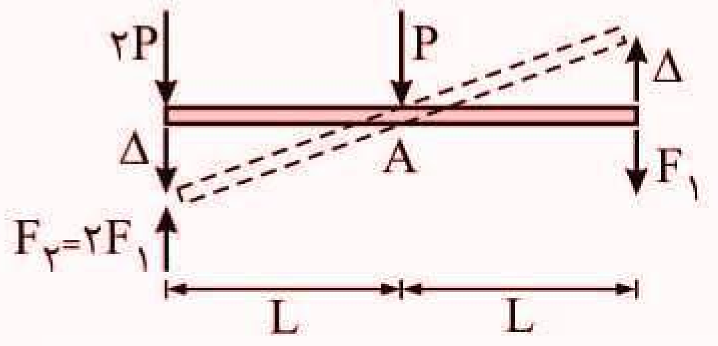


$$\Delta_{Ox} = \Delta_{Bx} = B'B'' = \frac{\Delta_{By}}{\tan\alpha} = \frac{\frac{۳wL}{۲AE}}{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow \Delta_{Ox} = \frac{۹wL}{۸AE}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_{Ox}}{\Delta_{Oy}} = \frac{\frac{۹wL}{۸AE}}{\frac{۳wL}{۲AE}} = \boxed{\frac{۳}{۴}}$$

۳- (۳) ساده

با توجه به اینکه میله صلب میانی تغییر طول نمی‌دهد تغییر طول میله‌های کناری مطابق شکل زیر خواهد بود:

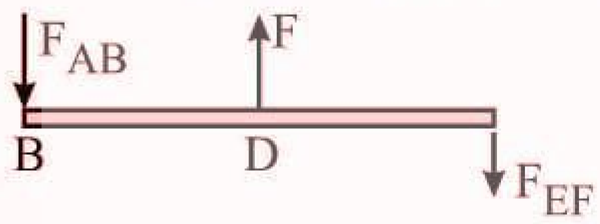


$$\begin{cases} \Delta = \dfrac{F_۱ L}{EA} \\ \Delta = \dfrac{F_۲ L}{۲EA} \end{cases} \Rightarrow F_۲ = ۲F_۱$$

$$\sum M_A = ۰ \Rightarrow ۲P \times L = F_۱ \times L + ۲F_۱ \times L \Rightarrow \boxed{F_۱ = \frac{۲}{۳}P}$$

۴- (۴) دشوار

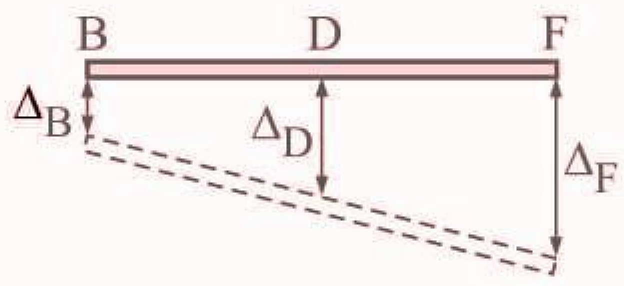
این سازه یک درجه نامعین بوده و با تغییر دمای اعضای آن امکان ایجاد نیرو در اعضاء وجود دارد در صورتیکه نیـروی داخلی در میلهٔ CD را F به صورت کششی فرض کنیم نیروی میله‌های AB و EF به صورت زیر حاصل خواهد شد:



$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow F_{EF} = \frac{F}{۲} \text{ کششی}$$

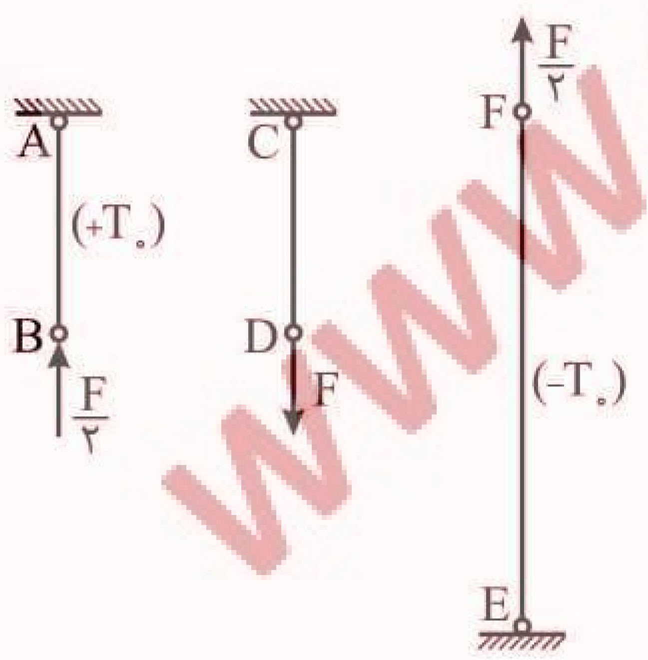
$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_{AB} = \frac{F}{۲} \text{ فشاری}$$

در ادامه با تعریف یک معادله سازگاری بین تغییر مکان‌ها داریم:



$$\downarrow ۲\Delta_D = \Delta_B + \Delta_F$$

از طرفی با در نظر گرفتن عکس‌العمـل نیروهـای میلهٔ صـلب روی اعضاء CD , AB و EF داریم:



$$\downarrow \Delta_D = \frac{FL}{AE}$$

$$\downarrow \Delta_B = \alpha L T_۰ - \frac{\frac{F}{۲} \times L}{AE}$$

$$\downarrow \Delta_F = \alpha \times ۲L \times T_۰ - \frac{\frac{F}{۲} \times ۲L}{AE}$$

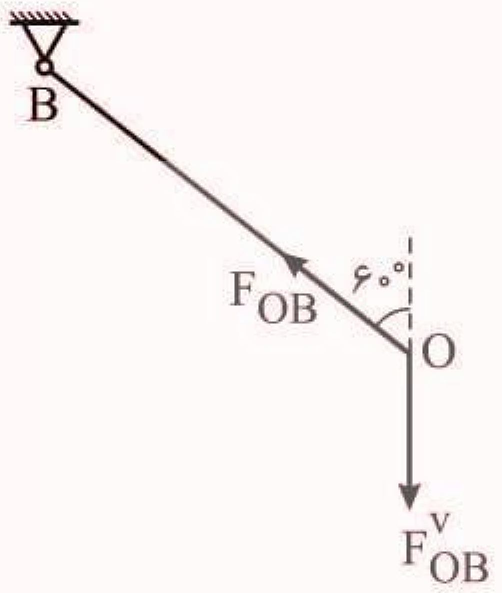
درانتها با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه سازگاری مقدار F را به دست می‌آوریم:

$$۲ \times \frac{FL}{AE} = \alpha L T_۰ - \frac{FL}{۲AE} + ۲\alpha L T_۰ - \frac{FL}{AE}$$

$$\Rightarrow F = \frac{۶}{۷} AE\alpha T_۰ \Rightarrow \boxed{F_{CD} = \frac{۶}{۷} AE\alpha T_۰}$$

۵- (۱) متوسط

سازه را می‌توان به صورت مجموع ۶ فنر موازی در امتداد قائم در نظر گرفت که نیروی اعمال شده به نسبت سختی بین آنها توزیع می‌شود.



$$F_{OB}^{v} = P \times \frac{K_{OB}^{v}}{\Sigma K}$$

$$K_{OB}^{v} = K_{OD}^{v} = K_{OF}^{v} = K_{OE}^{v} = \frac{AE}{۲L} \times \cos^{۲} ۶۰ = \frac{AE}{۸L}$$

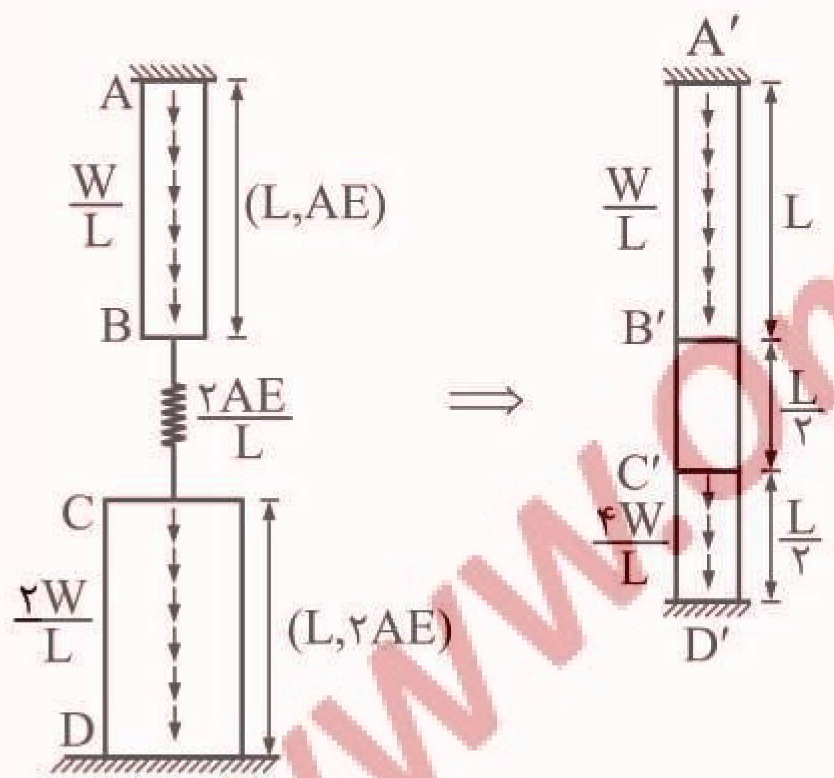
$$K_{OC}^{v} = \frac{AE}{L} \quad , \quad K_{OA}^{v} = \frac{AE}{L} \times \cos^{۲} ۹۰ = ۰$$

$$F_{OB}^{v} = P \times \frac{\frac{AE}{۸L}}{۴ \times \frac{AE}{۸L} + \frac{AE}{L}} = \frac{P}{۱۲}$$

$$F_{OB} \times \cos ۶۰ = F_{OB}^{v} = \frac{P}{۱۲} \Rightarrow \boxed{F_{OB} = \frac{P}{۶}}$$

۶- (۲) متوسط

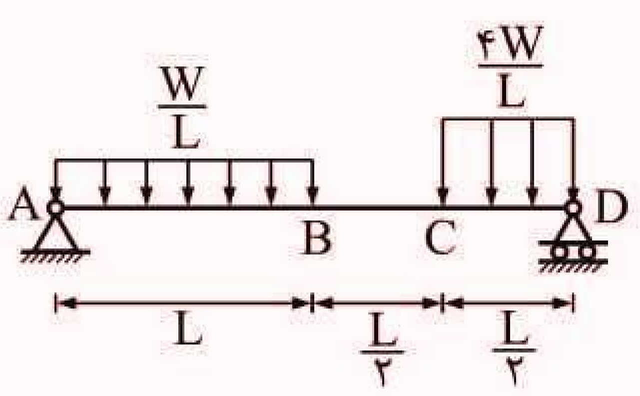
برای حل از روش تشابه تیر استفاده می‌کنیم. در این روش اگر قسمت AB را قسمت مبنا در نظر بگیریم ابتدا شکل میله معادل را رسم می‌کنیم.



$$k_{BC} = k_{B'C'} \Rightarrow \frac{۲AE}{L} = \frac{AE}{L_{A'B'}} \Rightarrow L_{B'C'} = \frac{L}{۲}$$

$$k_{CD} = k_{C'D'} \Rightarrow \frac{۲AE}{L} = \frac{AE}{L_{C'D'}} \Rightarrow L_{C'D'} = \frac{L}{۲}$$

دقت شود با نصف شدن طول میله CD شدت بار ناشی از وزن را باید دو برابر کنیم. در ادامه با مدلسازی میلهٔ معادل با یک تیر دو سر مفصل، عکس العمل A را به دست می‌آوریم:

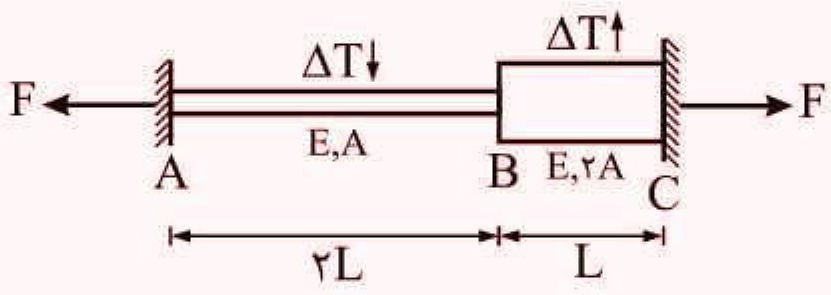


$$\Sigma M_D = ۰ \Rightarrow R_A \times ۲L = \frac{w}{L} \times L \times \left(\frac{L}{۲} + \frac{L}{۲} + \frac{L}{۲}\right) + \frac{۴w}{L} \times \frac{L}{۲} \times \frac{L}{۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_A = w}$$

۷- (۱) ساده

با نوشتن رابطه سازگاری جبری در سازه نامعین داده شده و در نظر گرفتن نیروی کشش F در تکیه‌گاه‌ها داریم:



$$\boxed{\Delta_{AB}+\Delta_{BC}=۰}$$

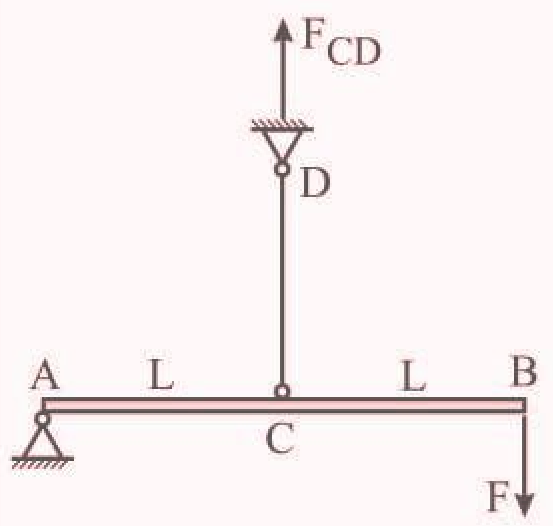
$$\Rightarrow\ (-\alpha\Delta T\times ۲L+\frac{F\times ۲L}{EA})+(\alpha\Delta TL+\frac{FL}{۲EA})=۰$$

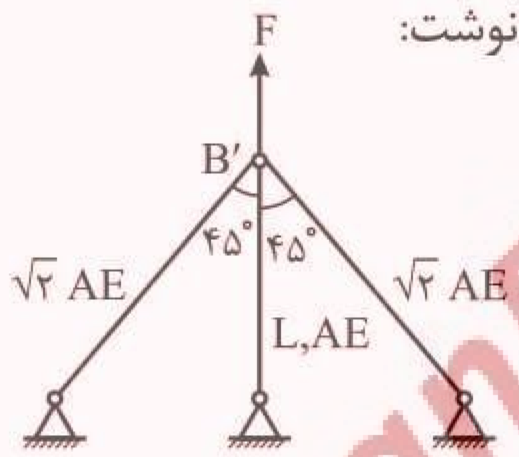
$$\Rightarrow\ F=\frac{۲}{۵}\alpha\Delta TEA$$

$$\boxed{\sigma_{BC}=\frac{F}{۲A}=\frac{۱}{۵}\alpha\Delta TE}$$

۸- (۴) دشوار

فرض کنید که با اتصال نقطهٔ B' به نقطهٔ B، نیروی F بر جسم صلب وارد می‌شود. در این‌صورت برای نصب مجموعه میزان نزدیک شدن دو نقطهٔ B و B' به یکدیگر باید برابر e باشد. با توجه به این موضوع و با استفاده از ایده فنرهای موازی می‌توان نوشت:





$$\sum M_A=۰\ \Rightarrow\ F_{CD}=۲F$$

$$\Delta_B=۲\times\Delta_C=۲\times\frac{F_{CD}\times L}{AE}=۲\times\frac{۲F\times L}{AE}=\frac{۴FL}{AE}$$

$$\Delta_{B'}=\frac{F}{\frac{AE}{L}+۲\times\frac{\sqrt{۲}AE}{\sqrt{۲}L}\cos^{۲}۴۵}=\frac{FL}{۲AE}$$

$$\Delta_B+\Delta_{B'}=e\ \Rightarrow\ \frac{۴FL}{AE}+\frac{FL}{۲AE}=e\ \Rightarrow\ F=\frac{۲}{۹}\times\frac{AEe}{L}$$

$$\text{دوران میله صلب}=\theta=\frac{\Delta_B}{۲L}=\frac{۱}{۲L}\times\frac{۴FL}{AE}=\frac{۴e}{۹L}\ \Rightarrow\ \boxed{\theta=\frac{۴e}{۹L}}$$

۹- (۲) دشوار

انرژی محوری برابر است با:

$$u=\frac{F^{۲}\times L}{۲EA}$$

اگر $F'_۲$ مقدار نیروی مورد نیاز برای تغییرمکان لوله (۲) به اندازه ۹ cm باشد داریم:

$$\Delta=\frac{F'_۲\times L}{(EA)_۲}\ \Rightarrow\ ۹\,cm=\frac{F'\times ۳۰۰\,cm}{۳۰۰۰\,kg}\ \Rightarrow\ F'_۲=۹۰\,kg$$

مقدار باقیمانده نیرو یعنی $۳۰۰-۹۰=۲۱۰\ kg$ به نسبت سختی بین میله توپر (۱) و لوله (۲) تقسیم می‌گردد و داریم:

$$F_۱=\frac{(EA)_۱}{(EA)_۱+(EA)_۲}\times ۲۱۰\ kg=\frac{۹}{۳+۹}\times ۲۱۰=\frac{۳۱۵}{۲}\ kg$$

$$F_۲=\frac{۳}{۳+۹}\times ۲۱۰=\frac{۱۰۵}{۲}\ kg$$

بنابراین نیروی ایجاد شده در میله‌های (۱) و (۲) برابر است با:

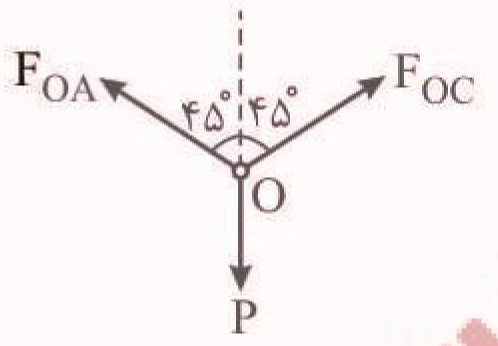
$$\begin{cases} F_۱=\dfrac{۳۱۵}{۲} \\ F_۲=۹۰+\dfrac{۱۰۵}{۲}=\dfrac{۲۸۵}{۲} \end{cases}$$

نسبت انرژی محوری (کرنشی) میله‌ها برابر است با:

$$\Rightarrow\ \frac{u_۲}{u_۱}=\frac{F_۲^۲\times L}{(EA)_۲}\times\frac{(EA)_۱}{F_۱^۲\times L}=\left(\frac{۲۸۵}{۳۱۵}\right)^۲\times\frac{۹}{۳}=\frac{۱۹\times۱۹\times۹}{۲۱\times۲۱\times۳}=\frac{۳۶۱}{۱۴۷}\simeq ۲/۴۵\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{u_۲}{u_۱}\simeq ۲/۵}$$

۱۰- (۳) متوسط

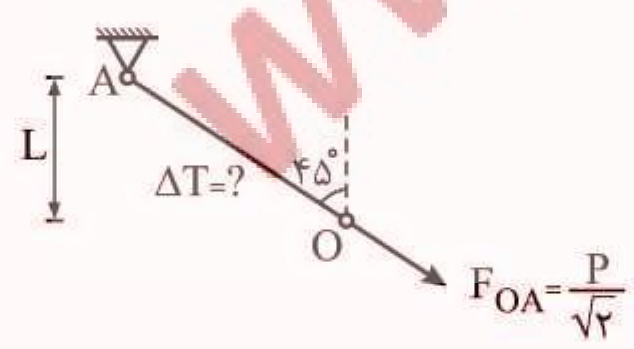
در صورتی‌که نیروی میلهٔ OB صفر باشد با توجه به وجود تقارن در خرپا می‌توان نتیجه گرفت جابه‌جایی مفصل O صفر بوده و در نتیجه تغییر طول‌های اعضاء OE و OD نیز صفر می‌باشد. بنابراین اعضای OE و OD در خرپا نیز صفر نیرویی بوده و تمام نیروی P را تنها میله‌های OA و OC تحمل خواهند کرد.



$$\sum F_x=۰\ \Rightarrow\ F_{OA}=F_{OC}$$

$$\sum F_y=۰\ \Rightarrow\ ۲F_{OA}\times\cos۴۵=P\ \Rightarrow\ F_{OA}=\frac{P}{\sqrt{۲}}$$

از طرفی با مشخص بودن نیرو در اعضای OA و OC می‌توان تغییر طول این اعضاء را محاسبه کرده و با توجه به حضور کاهش دمای این اعضاء تغییر دما را طوری محاسبه کرد که تغییر طول این اعضاء نیز صفر شود.

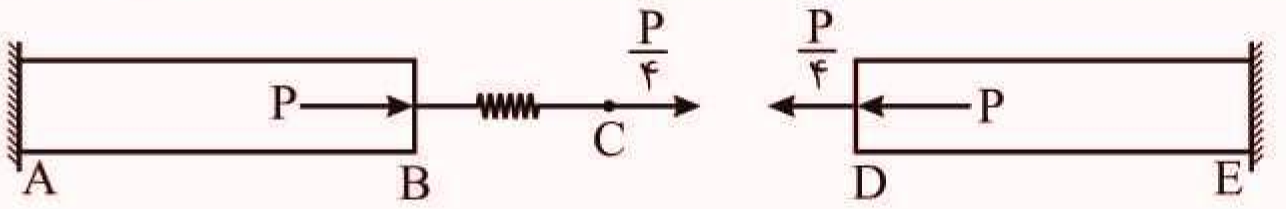


$$L_{OA}=\frac{L}{\cos۴۵}=\sqrt{۲}\,L$$

$$\Delta L_{OA}=\frac{\dfrac{P}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲}\,L}{AE}-\alpha(\sqrt{۲}\,L)\times\Delta T=۰\ \Rightarrow\ \boxed{\Delta T=\frac{P}{\sqrt{۲}\,AE\alpha}}$$

۱۱- (۲) متوسط

با توجه به فرض سؤال نیروی فنر را به‌صورت $\frac{P}{۴}$ به‌صورت کششی در طرفین در نظر گرفته و یک معادله سازگاری را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:



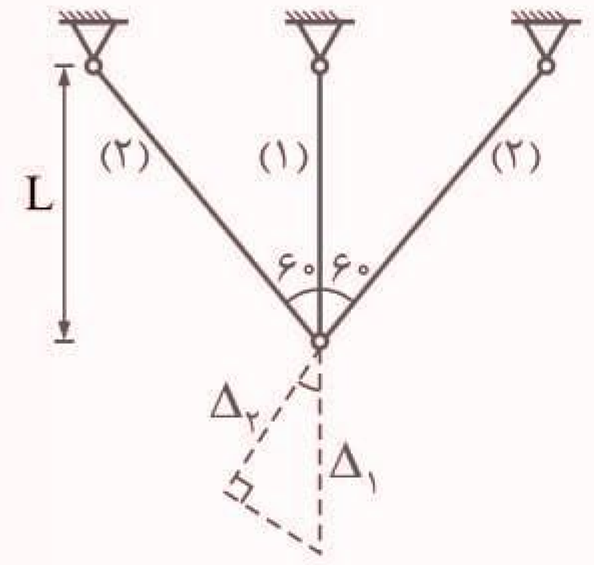
$$\vec{\Delta}_C + \vec{\Delta}_D = \Delta_0$$

در ادامه، با جایگذاری رابطهٔ سازگاری داریم:

$$\left[\frac{(P+\frac{P}{4})L}{AE} + \frac{\frac{P}{4}}{\frac{AE}{10L}}\right] + \left[\frac{(P+\frac{P}{4})L}{AE}\right] = \Delta_0 \Rightarrow \boxed{\Delta_0 = \frac{5PL}{AE}}$$

۱۲- (۳) متوسط

رابطه سازگاری تغییرمکان‌ها برابر است با:



$$\Delta_1 \cos 60 = \Delta_2$$

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L}{EA} - \alpha \Delta T L$$

$$\Delta_2 = \alpha \Delta T (2L) - \frac{F_2 \times (2L)}{EA}$$

تعادل قائم در گره برابر است با:

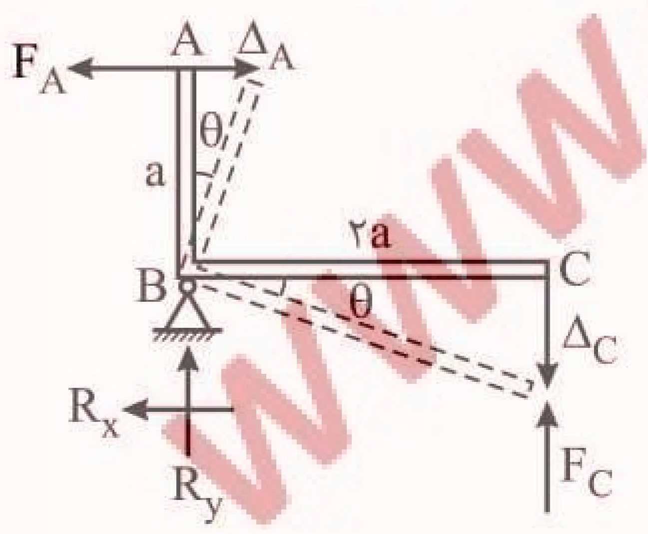
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 2F_2 \cos 60 = F_1 \Rightarrow F_1 = F_2$$

بنابراین به کمک معادلات سازگاری و تعادل داریم:

$$\Rightarrow \boxed{F_1 = F_2 = \alpha \Delta T E A}$$

۱۳- (۴) متوسط

سازه محوری داده شده هیپراستاتیک می‌باشد و معادله سازگاری آن مطابق با شکل مقابل برابر است با:



$$\Rightarrow \Delta_C = 2\Delta_A$$

$$\Rightarrow \frac{F_C}{2k} = 2 \times \frac{F_A}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_C = 4F_A} \qquad (I)$$

با نوشتن معادله تعادل لنگر حول نقطه B داریم:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_A \times a + F_C \times 2a = P \times 2a + Pa \Rightarrow \boxed{F_A + 2F_C = 3P} \qquad (II)$$

بنابراین نیروی فنرها برابر است با:

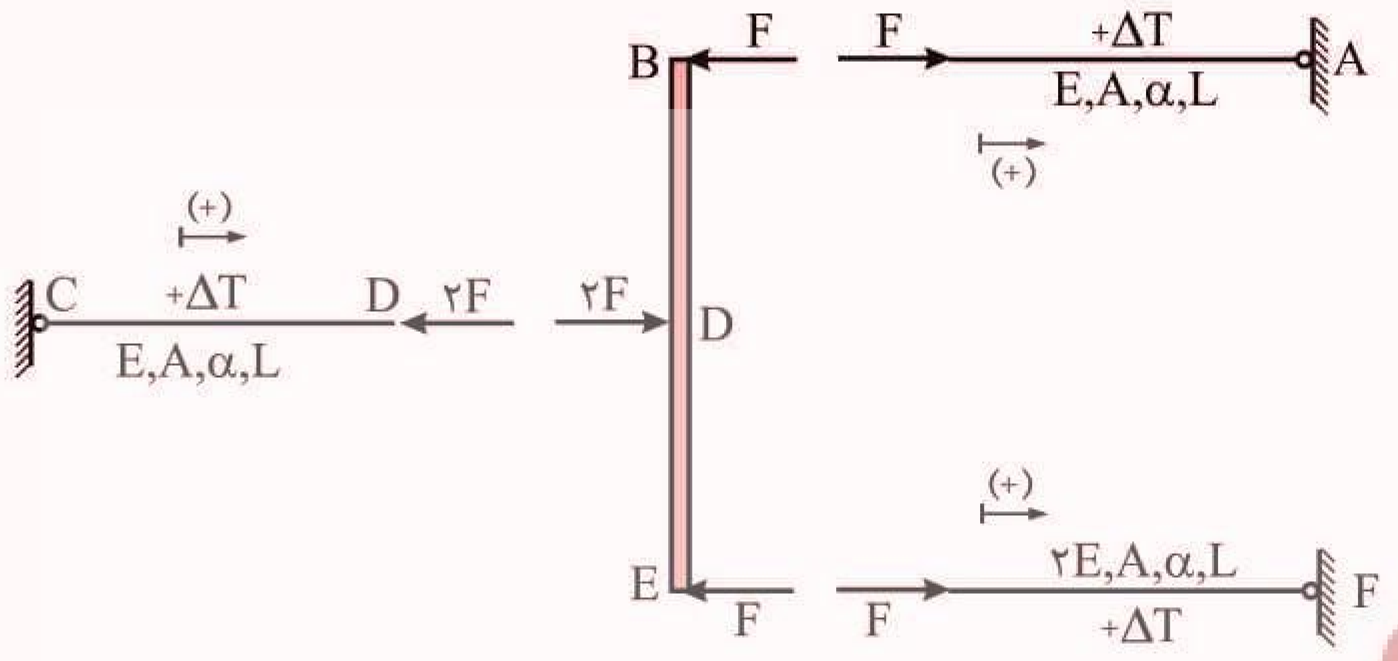
$$\Rightarrow \begin{cases} F_A = \dfrac{P}{3} \\ F_C = \dfrac{4}{3}P \end{cases}$$

و دوران قطعه صلب برابر می‌شود با:

$$\theta = \frac{\Delta_A}{a} = \frac{\frac{F_A}{k}}{a} = \frac{\frac{P}{3k}}{a} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{P}{3ka}}$$

۱۴- (۱) متوسط

این سازه یک درجه نامعین است. برای حل اگر حرکت به سمت راست را مثبت فرض کنیم و با فرض اینکه نیروی میلهٔ AB برابر F و فشاری است (نیروی سایر میله‌ها به‌سادگی برحسب معادلات تعادل به‌دست می‌آید)، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$\text{: معادلهٔ سازگاری} \quad \xrightarrow{(+)} \Delta_D = \frac{\Delta_B + \Delta_E}{2}$$

$$\Delta_D = \frac{\Delta_B + \Delta_E}{2} \Rightarrow 2\Delta_D = \Delta_B + \Delta_E$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2\times\left[-\frac{2F\times L}{AE} + \alpha L\Delta T\right] = \left(\frac{FL}{AE} - \alpha L\Delta T\right) + \left(\frac{FL}{2AE} - \alpha L\Delta T\right)$$

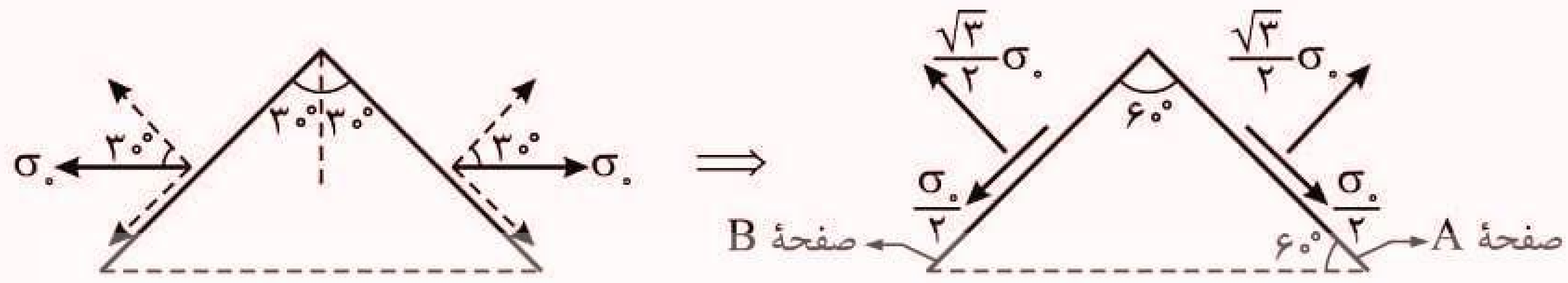
$$4\alpha L\Delta T = \frac{11}{2}\frac{FL}{AE} \Rightarrow F = \frac{8}{11}AE\alpha\Delta T \Rightarrow \boxed{\sigma_{AB} = \frac{F}{A} = \frac{8}{11}E\alpha\Delta T}$$

دقت: در تعیین علامت‌های مربوط به عبارات در محاسبهٔ Δ ها، جابه‌جایی به سمت راست مثبت فرض شده است. این یعنی به طور مثال علامت تغییرمکان متناظر با نیروی فشاری F در میلهٔ AB که باعث حرکت به سمت راست می‌شود مثبت است و علامت متناظر با تغییرمکان نیروی فشاری ۲F در میلهٔ CD که باعث حرکت به سمت چپ می‌شود، منفی است.

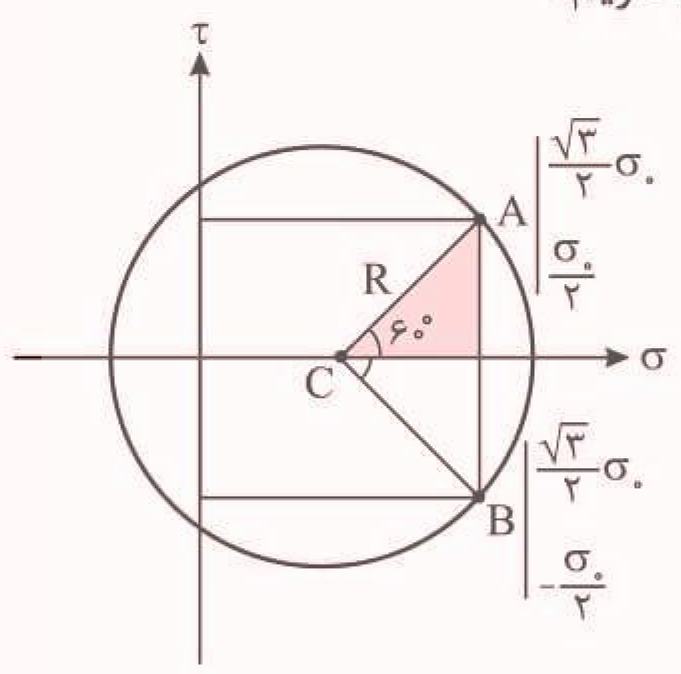
پاسخ تشریحی آزمون فصل دوم

۱- (۴) دشوار

ابتدا مؤلفه‌های تنش نرمال و برشی را روی صفحات المان به صورت زیر به دست می‌آوریم:



در ادامه دایره مورتنش را رسم می‌کنیم. صفحات A,B روی المان با یکدیگر زاویه ۶۰ درجه می‌سازند و بنـابراین نقاط متناظر آنها روی دایره مورتنش با یکدیگر زاویهٔ ۱۲۰ درجه می‌سازند و داریم:

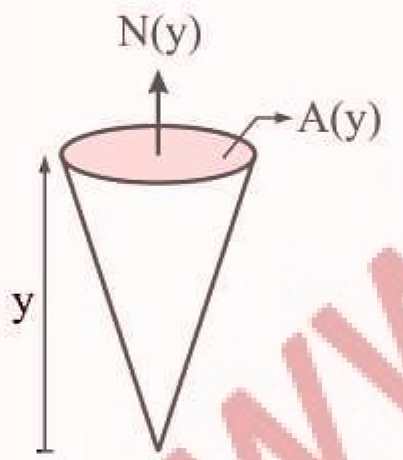


$$\sin 60 = \frac{\frac{\sigma_0}{2}}{R} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 - R\cos 60 + R$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma_0 - \frac{\sqrt{3}}{6}\sigma_0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\sigma_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma_0}$$

۲- (۱) متوسط



اگر در فاصله y از انتهای آزاد میله سطح مقطع مخروط را $A(y)$ فرض کنیم، داریم:

$$N(y) = \gamma \times V(y) = \gamma \times \frac{1}{3} \times A(y) \times y \Rightarrow \sigma(y) = \frac{N(y)}{A(y)} = \frac{\gamma y}{3}$$

از طرفی مقادیر $\sigma_z = 0$ و σ_x بوده و با انتخاب یک المان به ارتفاع d_y در مخروط تغییر ارتفـاع بـه صـورت زیـر محاسبه می‌شود:

$$d_L = \varepsilon_y \times d_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \times d_y = \frac{\gamma y}{3E} \times dy$$

$$\Rightarrow \Delta L = \int_0^L dL = \int_0^L \frac{\gamma y}{3E} \times dy = \frac{\gamma L^2}{6E}$$

با جایگذاری مقدار وزن میله برحسب وزن مخصوص داریم:

$$w = \gamma \times V = \gamma \times \frac{1}{3} \times A_0 \times L \Rightarrow \gamma L = \frac{3w}{A_0}$$

$$\Rightarrow\ \Delta L=\frac{\gamma L\times L}{۶E}=\frac{\frac{۳wL}{A_\circ}}{۶E}=\frac{wL}{۲A_\circ E}=\Delta \Rightarrow \boxed{w=\frac{۲A_\circ E\Delta}{L}}$$

۳- (۴) ساده

ضلع AB در المان تغییر طول ندارد اگر کرنش ε_x در المان صفر شود.

$$\varepsilon_x=۰\Rightarrow \frac{۱}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=۰\Rightarrow \sigma_y=\frac{\sigma_x}{\nu}$$

۴- (۱) دشوار

قبل از شروع حل این سؤال دقت کنید که پاسخ به‌صورت تقریبی مدنظر بوده و باید از کاربرد مشتق تغییر شیب OA را محاسبه کنیم و در نهایت شیب ثانویه آن را به‌دست آوریم، به این منظور داریم:

$$\text{OA شیب}=\frac{AB}{OB}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق‌گیری}}\ \text{OA تغییر شیب}=\frac{\Delta_{AB}\times OB-\Delta_{OB}\times AB}{OB^{۲}}=\frac{\Delta_{AB}\times ۲a-\Delta_{OB}\times a}{(۲a)^{۲}}$$

$$\text{OA تغییر شیب}=\frac{\Delta_{AB}}{۲a}-\frac{\Delta_{OB}}{۴a}$$

$$\begin{cases}\Delta_{AB}=a\times\varepsilon_y=a\times\frac{۱}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)=\frac{a}{E}(-۲\sigma-۰/۲\sigma)=-\frac{۲/۲\sigma_a}{E}\\ \Delta_{OB}=۲a\times\varepsilon_x=۲a\times\frac{۱}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)=\frac{۲a}{E}(\sigma-۰/۲(-۲\sigma))=\frac{۲/۸\sigma_a}{E}\end{cases}$$

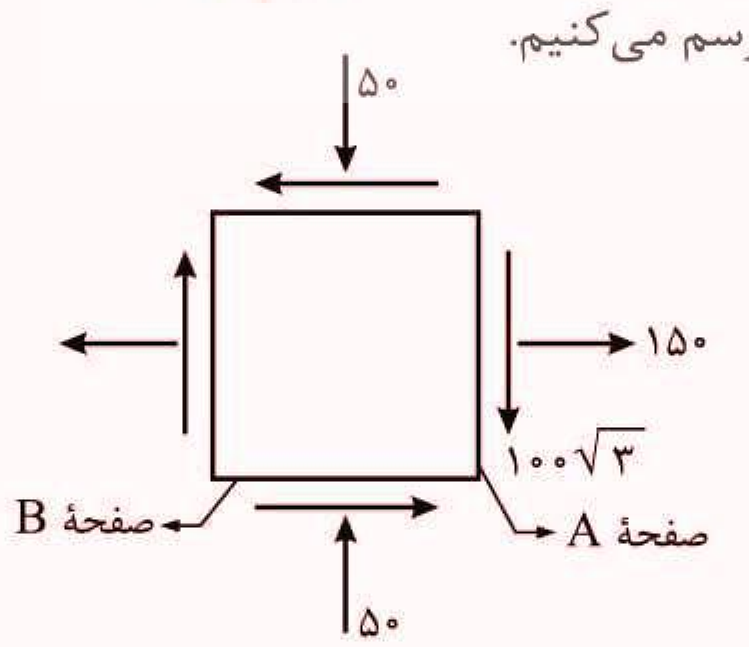
$$\Rightarrow\ \text{OA تغییر شیب}=-\frac{۱/۱\sigma}{E}-\frac{۰/۷\sigma}{E}=-\frac{۱/۸\sigma}{E}$$

$$\text{OA شیب ثانویه}=\text{OA شیب اولیه}+\text{OA تغییر شیب}=\frac{a}{۲a}-\frac{۱/۸\delta}{E}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱/۸\sigma}{E}$$

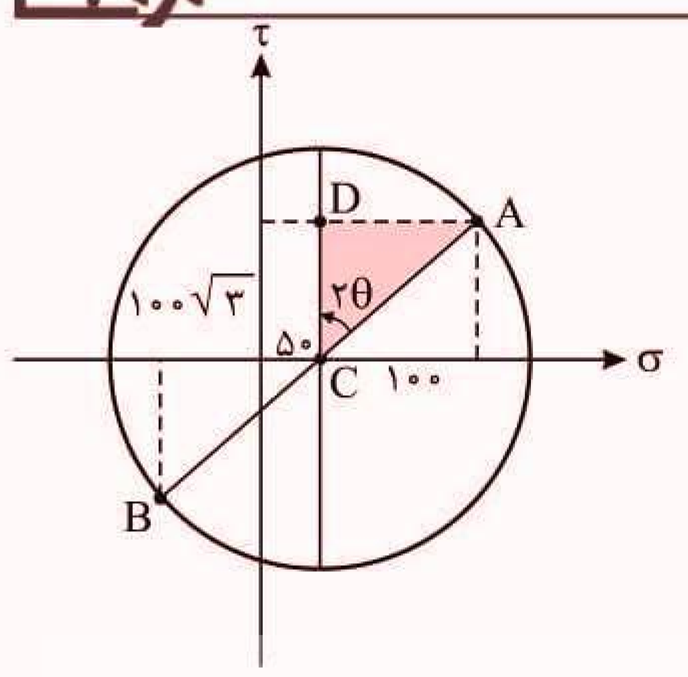
$$\Rightarrow\ \boxed{\text{OA شیب ثانویه}=\frac{۱}{۲}-\frac{۱/۸\sigma}{E}}$$

۵- (۳) متوسط

با انتخاب صفحات A و B در المان مطابق شکل زیر، دایره مور تنش را رسم می‌کنیم.



$$A\left|\begin{array}{l}۱۵۰\\ ۱۰۰\sqrt{۳}\end{array}\right.\qquad B\left|\begin{array}{l}-۵۰\\ -۱۰۰\sqrt{۳}\end{array}\right.$$



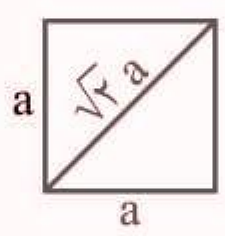
$$\Delta_{CAD} : \tan(۲\theta) = \frac{۱۰۰}{۱۰۰\sqrt{۳}} \Rightarrow ۲\theta = ۳۰^\circ \Rightarrow \boxed{\theta = ۱۵^\circ}$$

با چرخش صفحات المان به میزان °۱۵در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به صفحات تنش برشی حداکثر می‌رسیم. همچنین با چرخش °۱۵۰در دایره در جهت ساعتگرد می‌توان به صفحات τ_{max} رسید که باید صفحات المان را در جهت ساعتگرد °۷۵دوران داد.

۶- (۲) متوسط

قطر المان با راستای افقی زاویه °۴۵ می‌سازد و بنابراین داریم:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^۲\theta + \varepsilon_y \sin^۲\theta - \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{۰}{G} = ۰ \quad , \quad \theta = ۴۵^\circ$$



$$\Rightarrow \varepsilon_{diagonal} = \varepsilon_x \cos^۲ ۴۵ + \varepsilon_y \sin^۲ ۴۵ = \frac{۱}{۲}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{\Delta D}{D} = \frac{\delta_\circ}{\sqrt{۲}\,a}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{۲\delta_\circ}{\sqrt{۲}\,a} = \sqrt{۲}\frac{\delta_\circ}{a}$$

$$\Delta A = \varepsilon_A \times A_\circ = (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \times A_\circ = \sqrt{۲}\,\frac{\delta_\circ}{a} \times a^۲ = \sqrt{۲}\,\delta_\circ a \Rightarrow \boxed{\Delta A = \sqrt{۲}\,\delta_\circ\, a}$$

۷- (۳) متوسط

با نوشتن تعادل افقی در گره B نیروی این میله $\sqrt{۲}\,P$ کششی به‌دست می‌آید.

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{BC}\sin ۴۵ = P \Rightarrow F_{BC} = \sqrt{۲}\,P$$

رابطه کرنش حجمی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{۱-۲\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_x + \sigma_z)$$

با توجه به اینکه المان میله خرپایی یک المان تک محوره می‌باشد داریم:

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{۲}\,P}{A} \quad , \quad \sigma_y = \sigma_z = ۰$$

در نتیجه مقدار تغییر حجم میله BC برابر است با:

$$\Delta V = (A \times L\sqrt{۲}) \times \frac{۱-(۲\times ۰/۲)}{E}\left(\frac{\sqrt{۲}\,P}{A}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta V = ۱/۲\,\frac{PL}{E}}$$

۸- (۲) متوسط

در حالت کلی تنش، چگالی انرژی کرنشی برابر است با:

$$u_\circ = \frac{۱}{۲}\sigma_x\varepsilon_x + \frac{۱}{۲}\sigma_y\varepsilon_y + \frac{۱}{۲}\sigma_z\varepsilon_z + \frac{۱}{۲}\tau_{xy}\gamma_{xy} + \frac{۱}{۲}\tau_{xz}\gamma_{xz} + \frac{۱}{۲}\tau_{yz}\gamma_{yz}$$

$$u_\circ = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-2\nu(\sigma_x\sigma_y+\sigma_x\sigma_z+\sigma_y\sigma_z)\right]+\frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2+\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)$$

المان اول : $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\sigma_\circ \quad , \quad \tau_{xy}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0 \Rightarrow u_{\circ 1}=\frac{1}{2E}[3\sigma_\circ^2-2\nu\times 3\sigma_\circ^2]$

$$u_{\circ 1}=\frac{3\sigma_\circ^2}{2E}(1-2\nu)=\frac{3\sigma_\circ^2}{2E}(1-2\times 0/3)=0/6\frac{\sigma_\circ^2}{E} \Rightarrow \boxed{u_{\circ 1}=0/6\frac{\sigma_\circ^2}{E}}$$

المان دوم : $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_\circ \quad , \quad \sigma_z=0 \quad , \quad \tau_{xy}=\sigma_\circ \quad , \quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$

$$\Rightarrow u_{\circ 2}=\frac{1}{2E}[\sigma_\circ^2+\sigma_\circ^2-2\nu\times\sigma_\circ^2]+\frac{1}{2G}\times\sigma_\circ^2=\frac{\sigma_\circ^2}{E}(1-\nu)+\frac{\sigma_\circ^2}{2G}=\frac{\sigma_\circ^2(1-0/3)}{E}+\frac{\sigma_\circ^2}{2G}$$

$$=\sigma_\circ^2\left(\frac{0/7}{E}+\frac{0/5}{G}\right) \Rightarrow \boxed{u_{\circ 2}=\sigma_\circ^2\left(\frac{0/7}{E}+\frac{0/5}{G}\right)}$$

$$\frac{u_{\circ 1}}{u_{\circ 2}}=\frac{0/6\frac{\sigma_\circ^2}{E}}{\sigma_\circ^2\left(\frac{0/7}{E}+\frac{0/5}{G}\right)}=\frac{0/6}{0/7+0/5\frac{E}{G}}=\frac{0/6}{0/7+0/5\times 2(1+\nu)}=\frac{0/6}{0/7+1+0/3}=\frac{0/6}{2}=0/3$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{u_{\circ 1}}{u_{\circ 2}}=0/3}$$

یادآوری: بین مدول یانگ E، مدول برشی G و نسبت پواسون ν رابطه $E=2G(1+\nu)$ برقرار است.

۹- (۲) متوسط

مطابق با رابطه روبرو داریم:

$$\boxed{\varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{1-\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x+\varepsilon_y=\frac{1-0/3}{35\times 10^6}\times(-250+300)=10^{-6}$$

از طرفی مجموع کرنش‌های عمودی صفحات متعامد با هم برابر می‌باشد و داریم:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon_x+\varepsilon_y \Rightarrow 3\times 10^{-6}+\varepsilon_2=10^{-6} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2=-2\times 10^{-6}=-2\,\mu s}$$

۱۰- (۲) متوسط

دقت شود که در اثر تنش‌های اعمال شده ضلع‌های افقی کاهش طول و ضلع‌های قائم افزایش طول می‌دهد که در این‌صورت مقدار شیب خط AB بعد از اعمال تنش‌ها برابر است با:

$$\tan\theta=\frac{L+\varepsilon_y\times L}{L+\varepsilon_x\times L}=\frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x}$$

در المان دو محوره مقادیر کرنش‌ها برابر است با:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{E}(-\sigma - \nu\sigma) = -\frac{\sigma}{E}(1+\nu)$$

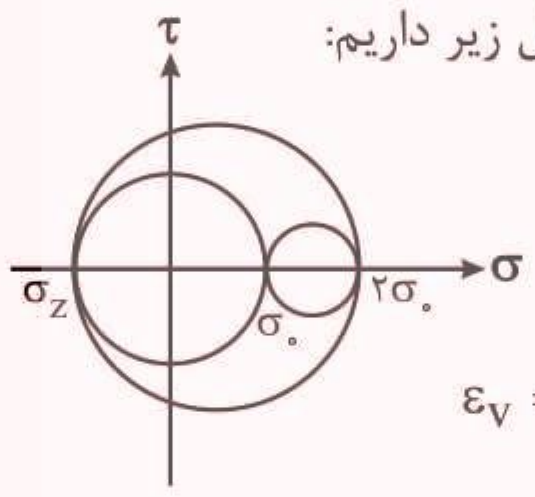
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}(\sigma - \nu(-\sigma)) = \frac{\sigma}{E}(1+\nu)$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1+\varepsilon_y}{1+\varepsilon_x} = \frac{1+(1+\nu)\frac{\sigma}{E}}{1-(1+\nu)\frac{\sigma}{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{E+(1+\nu)\sigma}{E-(1+\nu)\sigma}}$$

۱۱- (۱) دشوار

تنش برشی ماکزیمم المان، شعاع بزرگترین دایره مور تنش می‌باشد. با توجه به شکل زیر داریم:



$$\tau_{max} = R_{max} = \frac{2\sigma_\circ - \sigma_z}{2} = 1/5\,\sigma_\circ \Rightarrow 2\sigma_\circ - \sigma_z = 3\sigma_\circ$$

$$\Rightarrow \sigma_z = -\sigma_\circ$$

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_\circ} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\times(0/3)}{E}(2\sigma_\circ+\sigma_\circ-\sigma_\circ) = \frac{0/8\,\sigma_\circ}{E}$$

$$\Rightarrow \Delta V = V_\circ \times \frac{0/8\sigma_\circ}{E} = a^3 \times \frac{0/8\sigma_\circ}{E} \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{0/8a^3\sigma_\circ}{E}}$$

بنابراین داریم:

$$\Delta A = 2\times a^2 \times(\varepsilon_y+\varepsilon_z) + 2\times a^2\times(\varepsilon_x+\varepsilon_z) + 2\times a^2\times(\varepsilon_x+\varepsilon_y)$$

$$= 4a^2(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z) = 4a^2\times\varepsilon_v = 4a^2\times\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

$$= 4a^2\times\frac{(1-(2\times 0/3))}{E}(2\sigma_\circ+\sigma_\circ-\sigma_\circ) = 4a^2\times\frac{0/4}{E}\times 2\sigma_\circ \Rightarrow \boxed{\Delta A = \frac{3/2a^2\sigma_\circ}{E}}$$

۱۲- (۴) متوسط

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) = \frac{1-2\times 0/3}{E}(50+50+\sigma_z) = 0 \Rightarrow \sigma_z + 100 = 0 \Rightarrow \sigma_z = -100$$

σ_z یکی از تنش‌های اصلی است که برابر (۱۰۰-) به‌دست آمد. برای محاسبه دو تنش اصلی دیگر، المان تنش را به‌صورت دو بعدی بررسی می‌کنیم:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 50 & 30 \\ 30 & 50 \end{bmatrix} \sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{50+50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50-50}{2}\right)^2 + 30^2}$$

$$= 50 \pm 30$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} = 80 \quad , \quad \sigma_{min} = 20$$

با توجه به اینکه تنش‌های اصلی برابر (۱۰۰−)، ۲۰ و ۸۰ به‌دست آمده‌اند، تنش برشی ماکزیمم برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{۸۰-(-۱۰۰)}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \Rightarrow \boxed{\tau = ۹۰}$$

۱۳- (۱) متوسط

با توجه به پدیده پواسون، کرنش در جهت y برابر است با $-\nu\varepsilon_x$، حال از رابطه کرنش $\varepsilon(\theta)$ استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^۲\theta + \varepsilon_y \sin^۲\theta - \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \quad , \quad \gamma_{xy} = ۰ \quad , \quad \theta = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{۳۰^\circ} = \varepsilon_x \cos^۲ ۳۰ + (-\nu\varepsilon_x)\sin^۲ ۳۰ = \frac{۳}{۴}\varepsilon_x - \frac{۱}{۴}\nu\varepsilon_x \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{۳۰^\circ} = \frac{۳-\nu}{۴}\varepsilon_x}$$

۱۴- (۱) متوسط

با توجه به اینکه مکعب از تمام جهات بسته شده است لذا المان مربوط به آن از نوع المان هیدرواستاتیک بوده و در نتیجه تنش در تمام جهات یکسان و برابر است با:

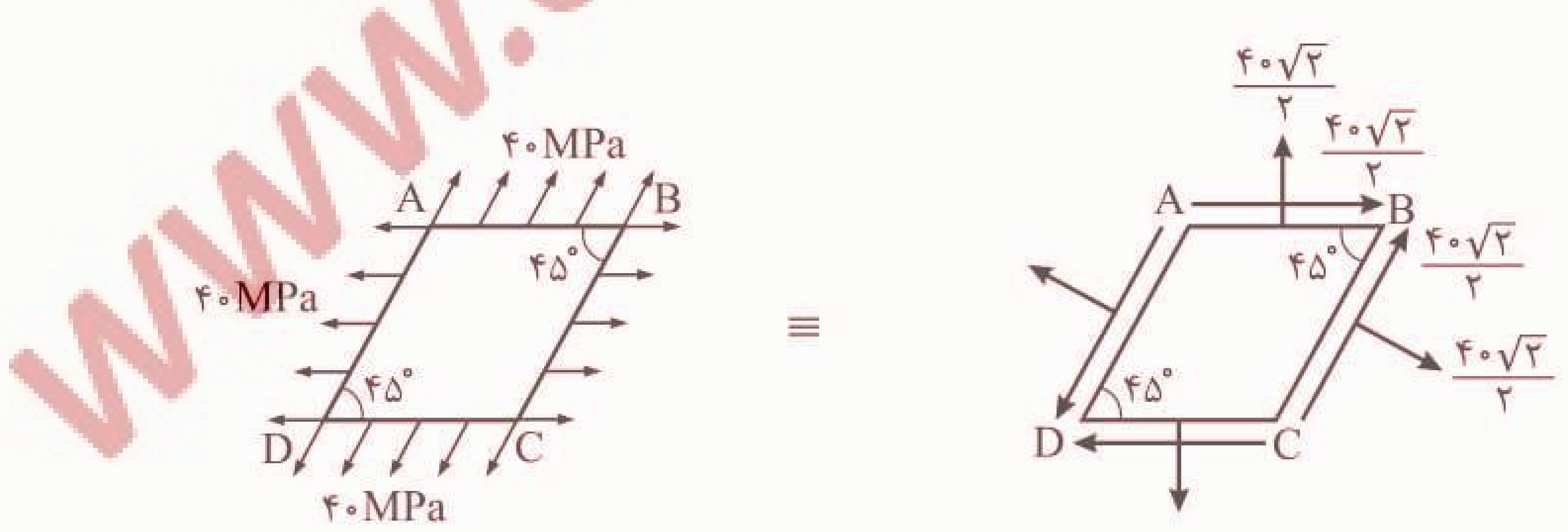
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + \alpha\Delta T = ۰$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\frac{\alpha\Delta TE}{۱-۲\nu}$$

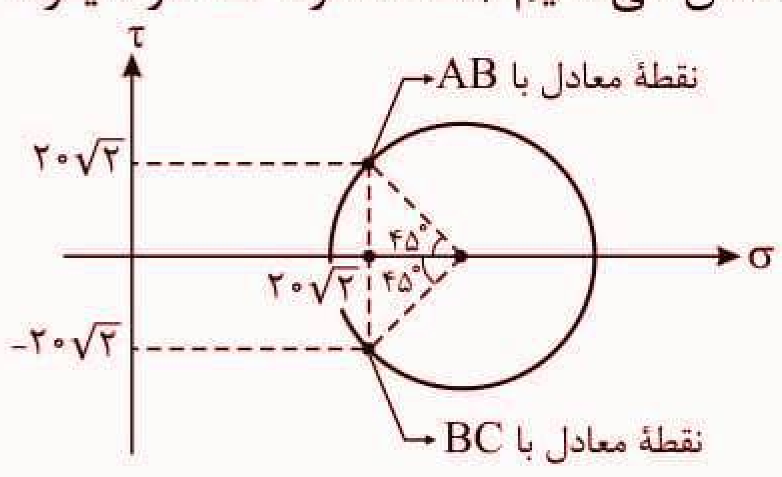
بنابراین در راستای یال AB مکعب نیز مقدار تنش ثابت و برابر با $\frac{\alpha\Delta TE}{۲\nu-۱}$ می‌باشد.

۱۵- (۳) متوسط

برای حل، تنش $\sigma_۰ = ۴۰MPa$ را به دو راستای عمود بر اضلاع و به موازات اضلاع (یعنی به فرم نرمال و برشی) تجزیه می‌کنیم:



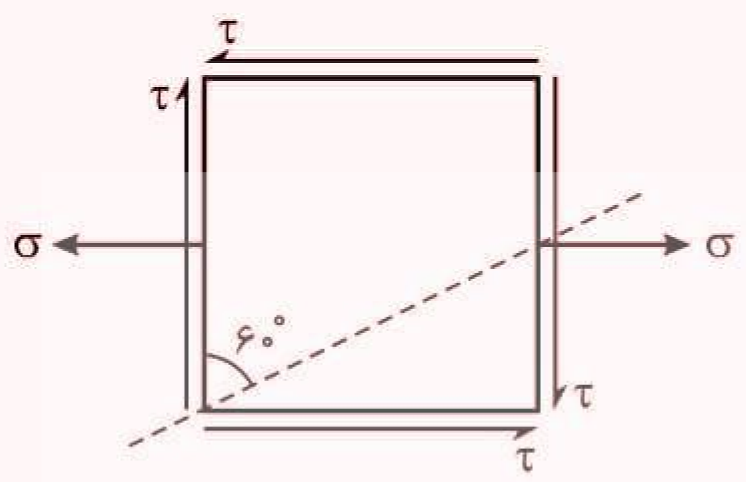
در ادامه صفحات AB و BC با زاویهٔ ۴۵° درجه را بر روی دایرهٔ موهر نشان می‌دهیم (دقت شود که در دایره، این زاویه برابر $۲\times۴۵^\circ$ می‌شود):



$$\sin ۴۵^\circ = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{R} \Rightarrow R = ۴۰ \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = R = ۴۰MPa}$$

۱۶- (۲) متوسط

روش اول: برای آنکه تنش برشی ماکزیمم در صفحهٔ خط‌چین خورده رخ دهد، تنش نرمال بر روی این صفحه باید برابر $\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}$ شود و برای این منظور داریم:



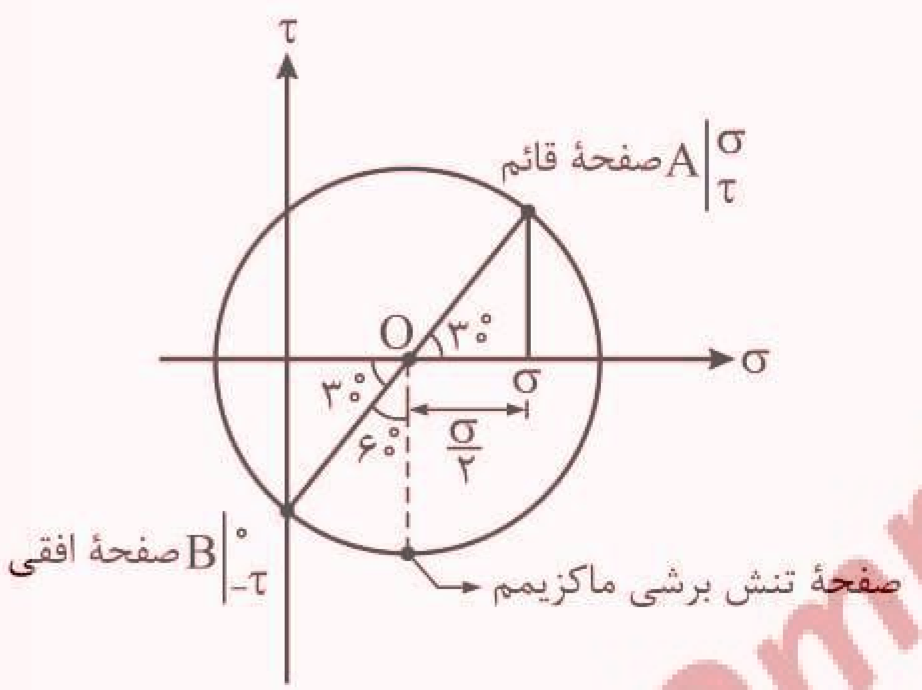
$$\sigma_x=\sigma \ ,\ \sigma_y=۰ \ ,\ \tau_{xy}=+\tau \ ,\ \theta=-۶۰^\circ$$

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{۲}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{۲}\cos ۲\theta-\tau_{xy}\sin ۲\theta$$

$$\frac{\sigma+۰}{۲}=\frac{\sigma+۰}{۲}+\frac{\sigma-۰}{۲}\cos ۲\times(-۶۰^\circ)-\tau\sin ۲\times(-۶۰^\circ)$$

$$\boxed{\frac{\tau}{\sigma}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}}$$

روش دوم: دایرهٔ مور المان به‌صورت مقابل است:



$$\tan ۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۳}=\frac{\tau}{(\frac{\sigma}{۲})}=\frac{۲\tau}{\sigma}\Rightarrow \boxed{\frac{\tau}{\sigma}=\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}}$$

پاسخ تشریحی آزمون فصل سوم

۱- (۴) ساده

$$\tau_{max} = (\tau_{max})_f = \frac{Tt_f}{J} = \frac{T\times 2t}{\frac{1}{3}a(2t)^3 + \frac{1}{3}(2a)t^3 + \frac{1}{3}a(2t)^3} = \frac{2Tt}{6at^3} = \frac{T}{3at^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{T}{3at^2}}$$

$$T_w = \frac{J_w}{J_{tot}}\times T = \frac{\frac{1}{3}(2a)t^3}{\frac{1}{3}a(2t)^3 + \frac{1}{3}(2a)t^3 + \frac{1}{3}a(2t)^3}\times T = \frac{\frac{2}{3}at^3}{6at^3}\times T = \frac{T}{9} \Rightarrow \boxed{T_w = \frac{T}{9}}$$

۲- (۲) متوسط

نیروی قسمت‌های موردنظر سؤال برابر است با:

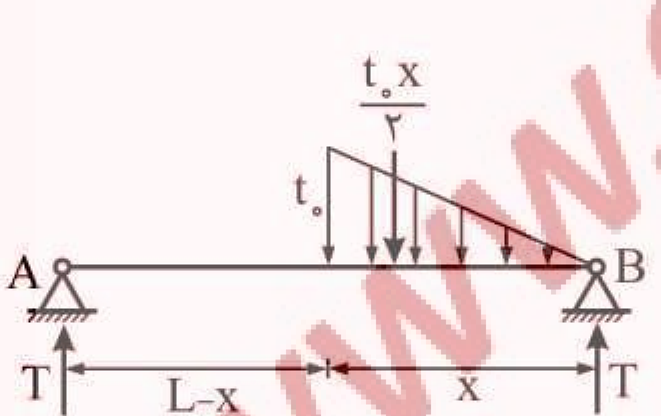
$$F_{BC} = \tau_{BC}\times(1/5a\times t) = \frac{T}{2A_m\times t}\times(1/5at) = \frac{T}{2A_m}\times\frac{3}{2}a$$

$$F_{DC} = \tau_{DC}\times(2a\times 2t) = \frac{T}{2A_m\times 2t}\times(4at) = \frac{T}{2A_m}\times 2a$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_{BC}}{F_{DC}} = \frac{3}{4} = 0/75}$$

۳- (۴) ساده

میله را از روش تیر مشابه می‌توان معادل‌سازی نمود و داریم:



مطابق با صورت تست، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باید با هم برابر باشد که در این‌صورت داریم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{t_0 x}{2} = 2T \Rightarrow T = \frac{1}{4}t_0 x \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow T\times L = \frac{t_0 x}{2}\times\frac{2}{3}x \Rightarrow T = \frac{t_0 x^2}{3L} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{1}{4}t_0 x = \frac{t_0 x^2}{3L} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{4}L}$$

۴- (۳) متوسط

می‌دانیم در هر لوله‌ای تنش برشی مینیمم در شعاع داخلی لوله و تنش برشی ماکزیمم در شعاع خارجی لوله ایجاد می‌شود. با توجه به تغییرات خطی کرنش برشی در مقطع دایروی تحت اثر لنگر پیچشی نتیجه می‌شود تنش برشی در هر نقطه از مقطع با فاصله آن نقطه از مرکز مقطع و همچنین مدول برشی مصالح مقطع در آن نقطه متناسب است ($\tau \propto r, G$) و بنابراین داریم:

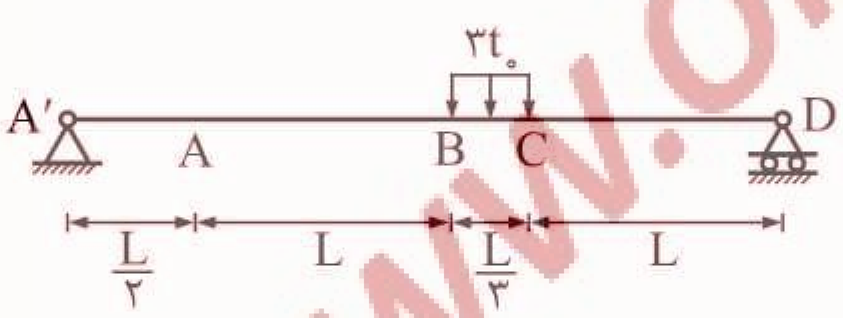
$$\frac{(\tau_{max})_۲}{(\tau_{min})_۱} = \frac{R_{۲max} \times G_۲}{R_{۱min} \times G_۱} = \frac{(\frac{۲۰}{۲} + ۲ + ۲) \times G_۲}{\frac{۲۰}{۲} \times G_۱} = \frac{۱۴\, G_۲}{۱۰\, G_۱} = ۱/۴\, \frac{G_۲}{G_۱} = ۱/۴ \times \frac{۱/۵\, G_۱}{G_۱} = ۲/۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(\tau_{max})_۲}{(\tau_{max})_۱} = ۲/۱}$$

۵- (۲) متوسط

در روش تشابه تیر (مدلسازی با تیر) اگر صلبیت پیچشی میله AB (GJ) را به‌عنوان صلبیت پیچشی مبنا در نظر بگیریم، به جای فنر پیچشی به سختی $\frac{۲\, GJ}{L}$ واقع در تکیه‌گاه A می‌توان میله‌ای به طول $\frac{L}{۲}$ در نظر گرفت ($\frac{GJ}{\frac{L}{۲}} = \frac{۲\, GJ}{L}$) و به جای میله BC نیز می‌توان میله‌ای به طول $\frac{L}{۳}$ در نظر گرفت (سختی پیچشی هر دو برابر است و $\frac{۳\, GJ}{L}$ می‌باشد) می‌بایست توجه داشته باشیم که برآیند کل بارگذاری نباید تغییر کند و بنابراین با $\frac{۱}{۳}$ شدن طول میله BC، شدت لنگر پیچشی گسترده وارده بر آن باید ۳ برابر شود.

با توجه به توضیحات فوق، تیر معادل زیر به‌دست می‌آید و عکس‌العمل تکیه‌گاه D در این تیر همان لنگر تکیه‌گاه گیردار D در تیر اصلی خواهد بود:



$$\Sigma M_{A'} = ۰ \Rightarrow R_D \times (\frac{L}{۲} + L + \frac{L}{۳} + L) - ۳\, t_۰ \times \frac{L}{۳} \times (\frac{L}{۲} + L + \frac{۱}{۲} \times \frac{L}{۳}) = ۰$$

$$\frac{۱۷}{۶} R_D\, L - t_۰ L \times \frac{۵L}{۳} = ۰ \Rightarrow R_D = \frac{۵}{۳} t_۰ L \times \frac{۶}{۱۷} = \frac{۱۰}{۱۷} t_۰ L \Rightarrow \boxed{T_D = \frac{۱۰}{۱۷} t_۰\, L}$$

۶- (۱) ساده

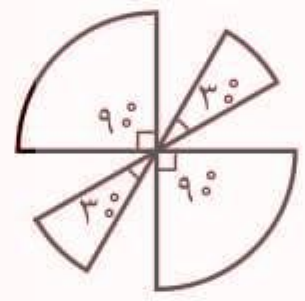
$$(\tau_{max})_{\text{دایره}} = \frac{TR}{J} = \frac{TR}{\frac{۱}{۲} \pi R^۴} = \frac{۲\, T}{\pi R^۳} \quad , \quad (\tau_{max})_{\text{مربع}} = \frac{T}{c_۱\, ab^۲} = \frac{T}{۰/۲۱\, a^۲ \times a} = \frac{T}{۰/۲۱\, a^۳}$$

$$\frac{۲T}{\pi R^۳} = \frac{T}{۰/۲۱\, a^۳} \Rightarrow ۰/۴۲ a^۳ = \pi R^۳ \Rightarrow a = \sqrt[۳]{\frac{\pi}{۰/۴۲}}\, R$$

$$\frac{A_{\text{مربع}}}{A_{\text{دایره}}}=\frac{a^2}{\pi R^2}=\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{\pi}{0.42}}\,R\right)^2}{\pi R^2}=\frac{\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{0.42^2}}}{\pi}=\frac{1}{\sqrt[3]{0.42^2\pi}}\Rightarrow\boxed{\frac{A_{\text{مربع}}}{A_{\text{دایره}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0.42^2\pi}}}$$

۷- (۲) دشوار

برای حل این سؤال مقطع دوم را به مقطع اول معادل آن تبدیل می‌کنیم. با توجه به تناسب تنش برشی با کرنش برشی ($\tau = G\gamma$) بایستی بدون تغییر شعاع مقطع (چون در صورت تغییر شعاع، توزیع تنش برشی مقطع را تغییر داده‌ایم) زاویه مربوط به مقطع دوم (90°) را در نسبت $\frac{G_2}{G_1}=\frac{G_2}{3\,G_2}=\frac{1}{3}$ ضرب کنیم که در این‌صورت علاوه بر دو ربع دایره از جنس اول، دو کمان 30° نیز از جنس اول به وجود می‌آید. در نهایت دایره‌ای ناقص از جنس اول با زاویه مرکزی 240° داریم:



$$J=\frac{\phi}{2\pi}\times\frac{1}{2}\pi R^4=\frac{240}{360}\times\frac{1}{2}\pi R^4=\frac{1}{3}\pi(10)^4=10467\ \text{cm}^4$$

$$\tau_{max}=\frac{TC}{J}=\frac{10\times10^5\times10}{10467}=955.4\ \text{kg/cm}^2\Rightarrow\boxed{\tau_{max}=955.4\ \text{kg/cm}^2}$$

تذکر: مقدار تنش برشی ماکزیمم ایجاد شده در دو ربع دایره از جنس دوم، $\frac{1}{3}$ مقدار فوق است و در محیط این ربع دایره‌ها ایجاد می‌شود.

۸- (۳) متوسط

در مقطع جدار نازک باز (مقطع (۱)) داریم:

$$\tau_w=\frac{T_w\times t_{max}}{J_t}\Rightarrow T_w=\tau_w\times\frac{J_t}{t_{max}}$$

$$J_t=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)t^3\times2+\frac{1}{3}(a)(2t)^3=3at^3$$

بنابراین ظرفیت پیچشی مقطع جدار نازک (۱) برابر است با:

$$T_w=\frac{\tau_w\times3at^3}{2t}\Rightarrow T_w^{(1)}=\frac{3}{2}at^2\times\tau_w$$

در مقطع جدار نازک بسته (مقطع (۲)) داریم:

$$\tau_w=\frac{T_w}{2A_m\times t_{min}}\Rightarrow T_w=\tau_w\times2A_m\times t_{min}$$

$$A_m=a\times1.5a=1.5a^2$$

بنابراین ظرفیت پیچشی مقطع جدار نازک (۲) برابر است با:

$$T_w=\tau_w\times2\times(1.5a^2)\times t\Rightarrow T_w^{(2)}=3a^2t\times\tau_w$$

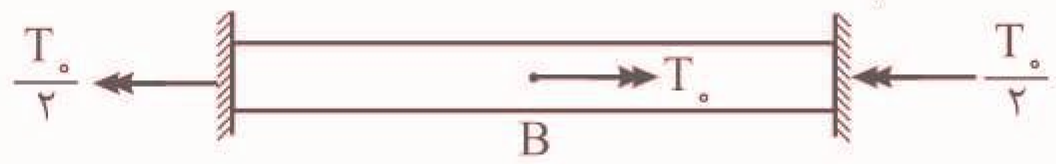
$$\Rightarrow\boxed{\frac{T_w^{(1)}}{T_w^{(2)}}=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{20}}$$

۹- (۴) دشوار

حداکثر تنش برشی ایجاد شده در مقطع مدور میله داده شده برابر است با:

$$\tau_{max} = \frac{T \times R}{J} = \frac{\frac{T_\circ}{۲} \times R}{(\frac{\pi R^۴}{۲})} = \frac{PR}{۴\pi R^۳} \Rightarrow \tau^{(۱)}_{max} = \frac{P}{۴\pi R^۲}$$

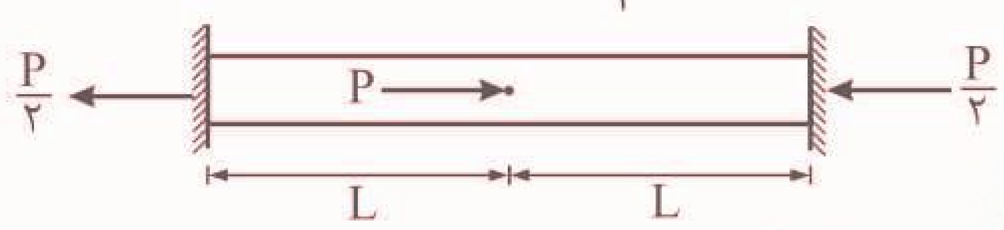
مطابق با شکل زیر لنگر پیچشی حداکثر در طول میله برابر با $\frac{T_\circ}{۲}$ می‌باشد:



حال اگر علاوه بر لنگر پیچشی، نیروی محوری P نیز در گره B قرار گیرد داریم:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{\frac{P}{۲}}{\pi R^۲} = \frac{P}{۲\pi R^۲}$$

همچنین مطابق با شکل زیر نیروی محوری ایجاد شده در طول میله برابر با $\frac{P}{۲}$ است:



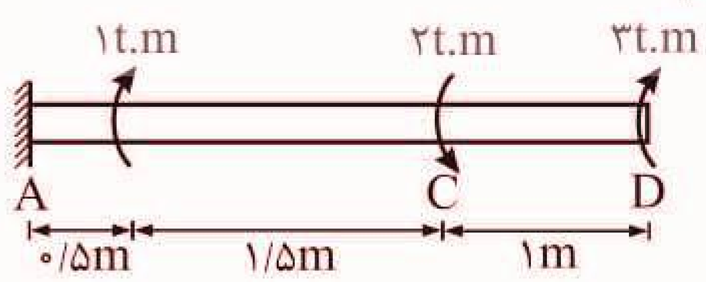
تنش برشی حداکثر در این حالت برابر است با (شعاع دایره مور تنش):

$$\tau_{max} = \sqrt{(\frac{\sigma - \circ}{۲})^۲ + (\tau)^۲} = \sqrt{(\frac{P}{۴\pi R^۲})^۲ + (\frac{P}{۴\pi R^۲})^۲} \Rightarrow \tau^{(۲)}_{max} = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \times \frac{P}{\pi R^۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\tau^{(۲)}_{max}}{\tau^{(۱)}_{max}} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۴} \frac{P}{\pi R^۲}}{\frac{۱}{۴} \frac{P}{\pi R^۲}} = \sqrt{۲}}$$

۱۰- (۴) ساده

برای محاسبه دوران انتهای تیر طره می‌توانیم برآیند لنگرهای پیچشی گسترده یکنواخت را در مرکز ثقل بارگذاری (وسط آن) قرار دهیم و با آن مانند یک لنگر متمرکز برخورد کنیم:

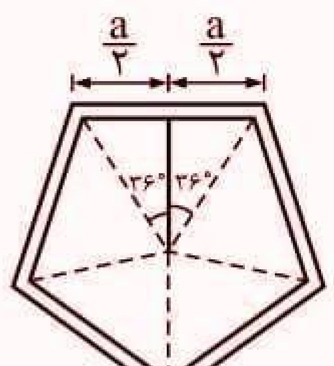


$$\phi_D = \Sigma \frac{T_i L_i}{GJ} = \frac{۱ \times ۰/۵}{۵۵} - \frac{۲ \times ۲}{۵۵} + \frac{۳ \times ۳}{۵۵} = \frac{۵/۵}{۵۵} = ۰/۱ \text{ rad} = ۰/۱ \times \frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸}{\pi} = ۵/۷^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_D = ۵/۷^\circ}$$

۱۱- (۲) متوسط

با توجه به یکسان بودن جنس دو مقطع، تنش‌های برشی مجاز آنها یکسان است که آن را τ_0 فرض می‌کنیم.



$$\tau_{closed}=\frac{T}{2A_m t}=\tau_0 \Rightarrow T_{closed}=2A_m t\tau_0$$

$$\tau_{open}=\frac{Tt}{J}=\frac{Tt}{5\times\frac{1}{3}at^3}=\frac{3T}{5at^2}=\tau_0 \Rightarrow T_{open}=\frac{5}{3}at^2\tau_0$$

$$\frac{T_{closed}}{T_{open}}=\frac{2A_m t\tau_0}{\frac{5}{3}at^2\tau_0}=\frac{6}{5}\frac{A_m}{at}$$

$$\cot 36=\frac{h}{\frac{a}{2}} \Rightarrow h=\frac{a}{2}\cot 36 \Rightarrow A_m=5\times\frac{1}{2}a\times h=\frac{5}{2}a\times\frac{a}{2}\cot 36=\frac{5}{4}a^2\cot 36$$

$$\frac{T_{closed}}{T_{open}}=\frac{6}{5}\frac{A_m}{at}=\frac{6}{5at}\times\frac{5}{4}a^2\cot 36=1/5\frac{a}{t}\cot 36=1/5\times 10\times 1/38=20/7$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_{closed}}{T_{open}}=20/7}$$

نکته: در حالت کلی اگر تعداد اضلاع مقطع منتظم n باشد، نسبت مقاومت پیچشی مقطع جدار نازک بسته به باز برابر $1/5\frac{a}{t}\cot\frac{\pi}{n}$ خواهد بود.

۱۲- (۱) ساده

ممان اینرسی پیچشی نبشی که جزو مقاطع جدار نازک باز محسوب می‌شود از رابطه $J=\sum\frac{1}{3}L_i t_i^3$ به‌دست می‌آید که با توجه به ثابت باقی ماندن ضخامت نبشی و سه برابر شدن ابعاد نبشی، نتیجه می‌شود J سه برابر شده است. با توجه به روابط زیر و ثابت باقی ماندن طول نبشی، نتیجه می‌گیریم که تنش برشی ماکزیمم و زاویه پیچش نبشی، هر دو $\frac{1}{3}$ برابر شده است.

$$\tau_{max}=\frac{Tt_{max}}{J}\quad,\quad t_{max}=t=\text{const} \Rightarrow \frac{\tau_{2max}}{\tau_{1max}}=\frac{J_1}{J_2}=\frac{J_1}{3J_1}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{2max}}{\tau_{1max}}=\frac{1}{3}}$$

$$\phi=\frac{TL}{GJ} \Rightarrow \frac{\phi_2}{\phi_1}=\frac{J_1}{J_2}=\frac{J_1}{3J_1}=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\phi_2}{\phi_1}=\frac{1}{3}}$$

۱۳- (۲) ساده

برای اینکه زاویه پیچش بر واحد طول $(\frac{d\varphi}{dx})$ هر دو مقطع برابر باشند نسبت $\frac{T_1}{T_2}$ مطابق با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{T}{GJ} \Rightarrow \frac{T_1}{J_1}=\frac{T_2}{J_2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2}=\frac{J_1}{J_2}$$

$$J_۱ = \frac{۱}{۳}\left[a \times t^۳ \times ۲ + at^۳\right] \times ۲ = ۲at^۳$$

$$J_۲ = \frac{۱}{۳}\left[۲a \times t^۳ \times ۲ + a(۲t)^۳\right] = ۴at^۳$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_۱}{T_۲} = \frac{۱}{۲}}$$

۱۴- (۱) متوسط

میله‌های AB و BC مانند فنرهای موازی رفتار می‌کنند. با توجه به اینکه ابعاد مقطع میله AB دو برابر ابعاد مقطع میله BC است، نتیجه می‌شود که ممان اینرسی پیچشی آن ۱۶ = $۲^۴$ برابر ممان اینرسی پیچشی مقطع BC است و داریم:

$$\frac{T_{AB}}{T_{BC}} = \frac{\frac{GJ_{AB}}{L}}{\frac{۴GJ_{BC}}{۲L}} = \frac{۱}{۲}\frac{J_{AB}}{J_{BC}} = \frac{۱}{۲} \times ۲^۴ = ۸ \quad , \quad \tau_{max} = \frac{T}{c_۱ ab^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{(\tau_{max})_{AB}}{(\tau_{max})_{BC}} = \frac{T_{AB}}{T_{BC}} \times \left(\frac{a}{۲a}\right)^۳ = ۸ \times \frac{۱}{۸} = ۱ \Rightarrow \boxed{\frac{(\tau_{max})_{AB}}{(\tau_{max})_{BC}} = ۱}$$

بنابراین تنش‌های برشی ماکزیمم ایجاد شده در میله‌های AB و BC با یکدیگر برابرند.

۱۵- (۳) متوسط

لنگر پیچشی روی مقطع جدار نازک باز به نسبت صلبیت پیچشی بین اجـزای مختلـف مقطـع توزیـع مـی‌شـود. بنابراین داریم:

$$\frac{T_{ABC}}{T_{کل}} = \frac{(GJ)_{ABC}}{\sum GJ} \xrightarrow{G = const} \frac{T_{ABC}}{T} = \frac{J_{ABC}}{\sum J}$$

$$\Rightarrow T_{ABC} = T \times \frac{J_{ABC}}{\sum J} = T \times \frac{\frac{۱}{۳} \times \pi R \times (۲t)^۳}{\frac{۱}{۳} \times \pi R(۲t)^۳ + \frac{۱}{۳} \times \pi Rt^۳} = \frac{۸T}{۹}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{ABC} = \frac{۸T}{۹}}$$

پاسخ تشریحی آزمون فصل چهارم

۱- (۱) متوسط

در گام اول، نسبت $\frac{a}{R}$ را برای آنها محاسبه می‌کنیم:

$$(M_{max})_{\text{مربع}} = (M_{max})_{\text{دایره}} \Rightarrow \sigma_{all} s_{\text{مربع}} = \sigma_{all} s_{\text{دایره}} \Rightarrow s_{\text{مربع}} = s_{\text{دایره}}$$

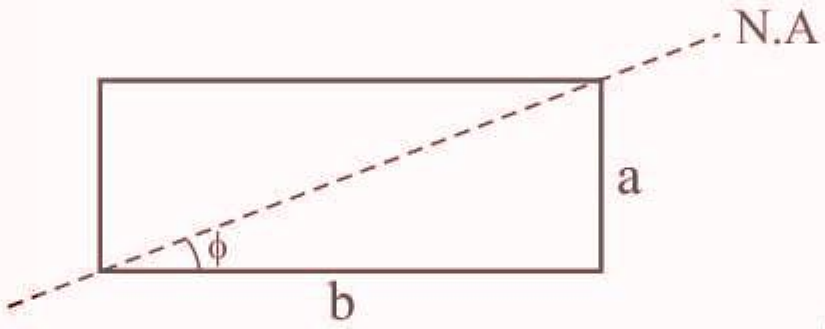
$$\Rightarrow \frac{a^{۳}}{۶} = \frac{\pi R^{۳}}{۴} \Rightarrow \frac{R}{a} = \sqrt[۳]{\frac{۲}{۳\pi}}$$

در ادامه در مقایسهٔ انحناء دو مقطع تحت لنگر یکسان داریم:

$$k = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{k_{\text{مربع}}}{k_{\text{دایره}}} = \frac{I_{\text{دایره}}}{I_{\text{مربع}}} = \frac{\frac{\pi R^{۴}}{۴}}{\frac{a^{۴}}{۱۲}} = \frac{۱۲\pi}{۴}\left(\frac{R}{a}\right)^{۴} = \frac{۱۲\pi}{۴}\left(\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳\pi}}\right)^{۴} = ۲\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳\pi}} = \sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۳\pi}}$$

۲- (۱) متوسط

با توجه به اینکه محور خنثی یکی از قطرهای مستطیل است و با توجه به جهت لنگر اشاره شده می‌توان گفت:



$$\tan\phi = \frac{a}{b}$$

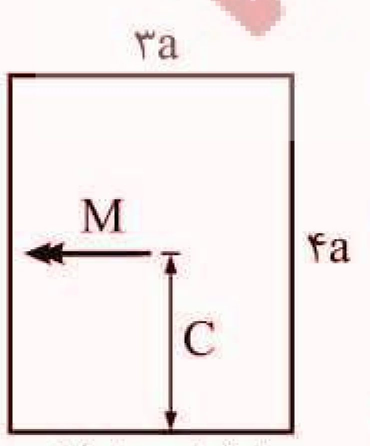
از طرفی می‌دانیم که محور خنثی محلی است که در آن $\sigma = ۰$ باشد.

$$\sigma(x,y) = ۰ = M_x \text{ ناشی از } \sigma + M_y \text{ ناشی از } \sigma \Rightarrow \frac{M\cos\theta \times y}{I_x} - \frac{M\sin\theta \times x}{I_y} = ۰ \Rightarrow y = \underbrace{\frac{I_x}{I_y}\tan\theta}_{\text{شیب خط} = \tan\phi} x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۱۲}ba^{۳}}{\frac{۱}{۱۲}b^{۳}a} \times \tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a^{۲}}{b^{۲}}\tan\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-۱}\frac{b}{a}$$

۳- (۳) ساده

مقطع را به مقطعی معادل با E تبدیل می‌کنیم که در این‌صورت ضریب تبدیل $n = ۳$ می‌باشد.



(مقطع معادل)

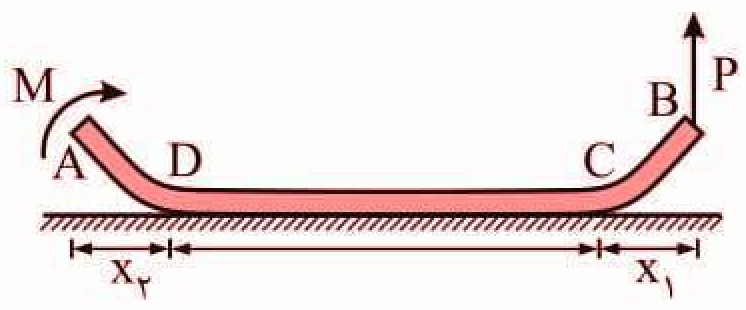
$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = \frac{M \times C}{EI}$$

$$I = \frac{(۳a)(۴a)^{۳}}{۱۲} = ۱۶a^{۴} \quad , \quad C = ۲a$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_{max} = \frac{۱}{۸}\frac{M}{Ea^{۳}}}$$

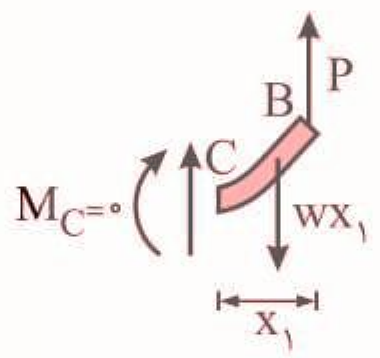
۴- (۳) دشوار

مطابق با بارگذاری انجام شده، تیر به‌صورت مقابل تغییرشکل می‌دهد:



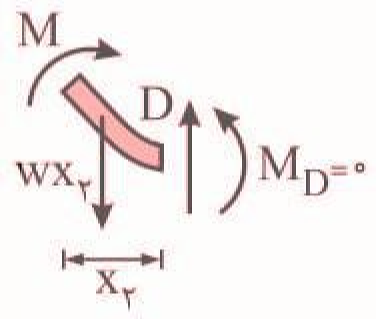
دقت شود که در مجموع تیر به اندازه $x_1 + x_2$ از زمین جدا می‌شود. ابتدا برای قسمت سمت راست تیر، در نقطه C به‌دلیل عدم وجود لنگر متمرکز، لنگر خمشی مقداری پیوسته داشته و در دو طرف آن یکسان است در سمت چپ نقطه C شعاع انحنا بی‌نهایت بوده و در نتیجه انحنا صفر است و داریم:

$$\rho = \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M_C = 0$$



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow P \times x_1 = wx_1 \times \frac{x_1}{2} \Rightarrow P = \frac{wx_1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2P}{w} = \frac{2 \times 6}{2/4} = 5\,m$$

همچنین در نقطه D هم مقدار لنگر صفر بوده و خواهیم داشت:



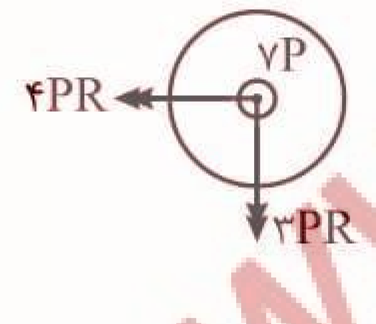
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow M = wx_2 \times \frac{x_2}{2} \Rightarrow M = \frac{wx_2}{2} \Rightarrow x_2^2 = \frac{2M}{w}$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{2M}{w}} = \sqrt{\frac{2 \times 10/8}{2/4}} = 3\,m$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5 + 3 = 8\,m}$$

۵- (۴) متوسط

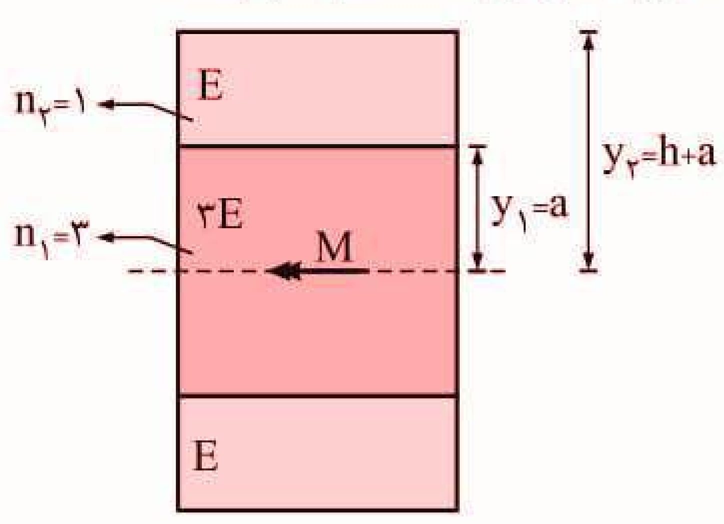
$$\sigma_{max} = -\frac{7P}{A} - \frac{\sqrt{(3PR)^2 + (4PR)^2}}{S}$$



$$\begin{cases} A = \pi R^2 \\ S = \dfrac{\pi R^3}{4} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{max} = -\frac{7P}{(\pi R^2)} - \frac{5PR}{(\frac{\pi R^3}{4})} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = -27\frac{P}{\pi R^2}}$$

۶- (۲) متوسط

در اینگونه از سؤالات، هنگامی وضعیت بهینه در خمش رخ می‌دهد که به‌طور همزمان داشته باشیم:



$$\begin{cases} \sigma_{max_1} = \sigma_{all_1} \\ \sigma_{max_2} = \sigma_{all_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma_{max_1}}{\sigma_{max_2}} = \frac{\sigma_{all_1}}{\sigma_{all_2}}$$

$$\frac{n_1 \dfrac{My_1}{I}}{n_2 \dfrac{My_2}{I}} = \frac{\sigma_{all_1}}{\sigma_{all_2}} \Rightarrow \frac{n_1\, y_1}{n_2\, y_2} = \frac{\sigma_{all_1}}{\sigma_{all_2}}$$

در ادامهٔ حل داریم:

$$\frac{۳\times a}{۱\times(h+a)}=\frac{۲\sigma_۰}{۳\sigma_۰}\Rightarrow \boxed{h=۳/۵a}$$

۷- (۴) متوسط

برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

$$\text{گام ۱ :}\ \varepsilon_A=\frac{\sigma_A}{E}\Rightarrow ۲\times۱۰^{-۳}=\frac{M\times\frac{۲}{۳}h}{EI}\Rightarrow\frac{M}{EI}=\frac{۳\times۱۰^{-۳}}{h}$$

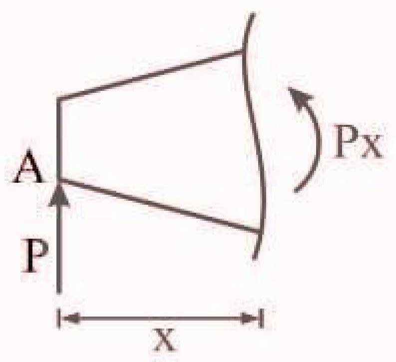
$$\text{گام ۲ : روابط حفظی}\Rightarrow \delta_{\text{وسط}}=\frac{ML^۲}{۸EI}\xrightarrow{\frac{M}{EI}=\frac{۳\times۱۰^{-۳}}{h}}$$

$$\delta_{\text{وسط}}=\frac{۳\times۱۰^{-۳}}{h}\times\frac{L^۲}{۸}=\frac{۳\times۱۰^{-۳}\times(۲۰h)^۲}{۸h}=۰/۱۵h$$

$$\Rightarrow\boxed{\delta_{\text{وسط}}=۰/۱۵h}$$

۸- (۲) دشوار

ابتدا در فاصلهٔ x از A، معادله $\sigma(x)$ را به‌دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}\sigma(x)=\dfrac{M(x)}{S(x)}=\dfrac{Px}{\dfrac{bh^۲(x)}{۶}}\\[2ex] h(x)=h+\dfrac{۲h}{L}x=h(۱+\dfrac{۲x}{L})\end{cases}$$

$$\sigma(x)=\frac{۶Px}{bh^۲(۱+\frac{۲x}{L})^۲}$$

$$\frac{d\sigma(x)}{dx}=۰\Rightarrow\frac{۱\times(۱+\frac{۲x}{L})^۲-\frac{۴}{L}(۱+\frac{۲x}{L})\times x}{(۱+\frac{۲x}{L})^۴}=۰$$

$$\text{صورت کسر}=۰\Rightarrow(۱+\frac{۲x}{L})(۱+\frac{۲x}{L}-\frac{۴x}{L})=۰\Rightarrow ۱-\frac{۲x}{L}=۰\Rightarrow\boxed{x=\frac{L}{۲}}$$

۹- (۳) متوسط

محاسبهٔ نسبت شعاع ژیراسیون دو مقطع:

$$I_۱=۴\left[\frac{۱}{۴}\pi R^۴+\pi R^۲\times R^۲\right]=۵\pi R^۴$$

$$A_۱=۴\times\pi R^۲=۴\pi R^۲$$

$$r_۱=\sqrt{\frac{I_۱}{A_۱}}=\sqrt{\frac{۵\pi R^۴}{۴\pi R^۲}}=\sqrt{\frac{۵}{۴}}R$$

$$I_2 = 4\left[\pi R^3 t + 2\pi Rt \times R^2\right] = 12\pi R^3 t$$

$$A_2 = 4 \times 2\pi Rt = 8\pi Rt$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_2}} = \sqrt{\frac{12\pi R^3 t}{8\pi Rt}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,R$$

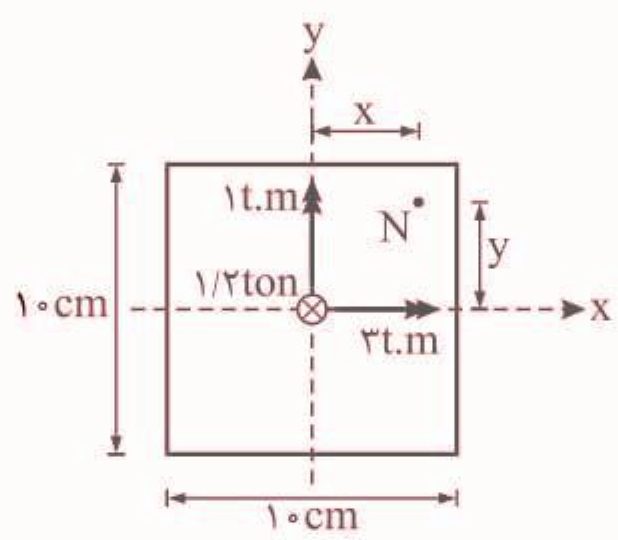
$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,R}{\sqrt{\frac{5}{4}}\,R} = \sqrt{\frac{3\times 4}{2\times 5}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

محاسبهٔ نسبت شعاع انحناء دو مقطع:

$$\rho = \frac{EI}{M} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{12\pi R^3 t}{5\pi R^4} = \frac{12}{5}\,\frac{t}{R}$$

۱۰- (۱) متوسط

در نقطه N واقع در ربع اول تنش‌های ناشی از M_x و M_y و نیروی محـوری P عبارت است از:



تنش ناشی از نیروی ۱/۲تن = $-\frac{P}{A} = \frac{-1.2\ \text{ton}}{(10\times 10)\times 10^{-4}} = -120\ \text{ton/m}^2$ فشاری

تنش ناشی از لنگر ۳ تن - متر = $\frac{+M_x \times y}{I_x} = \frac{3\times y}{\frac{(0.1)^4}{12}} = 3.6\times 10^5 y\ \ \text{ton/m}^2$ کششی

تنش ناشی از لنگر ۱ تن - متر = $-\frac{M_y \times x}{I_y} = -\frac{1\times x}{\frac{(0.1)^4}{12}} = -1.2\times 10^5 x\ \ \text{ton/m}^2$ فشاری

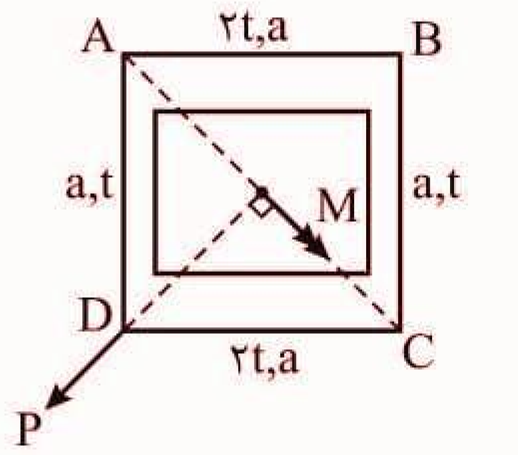
$$\Rightarrow \sigma_N = -120 + 3.6\times 10^5 y - 1.2\times 10^5 x$$

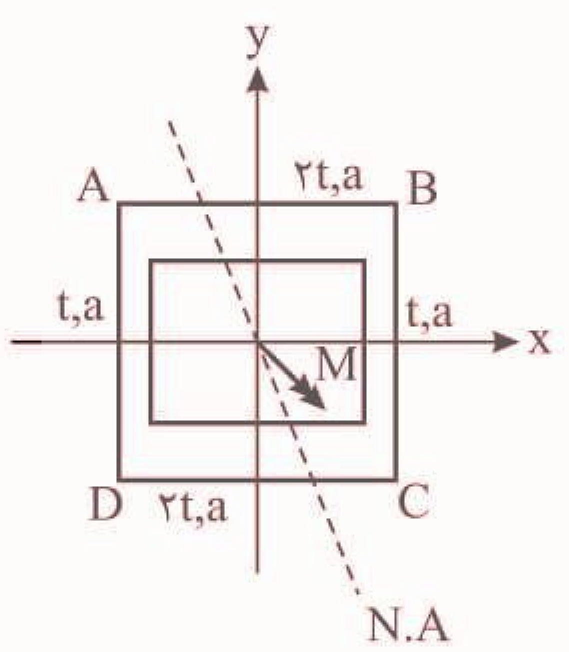
برای به‌دست آوردن معادله محور خنثی، کافی است تنش σ_N را برابر صفر قرار دهیم:

$$\sigma_Z = -120 + 3.6\times 10^5 y - 1.2\times 10^5 x = 0 \Rightarrow 3.6\times 10^5 y = 1.2\times 10^5 x + 120$$

$$3\times 10^3 y = 10^3 x + 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\times 10^{-3}}$$

۱۱- (۴) متوسط

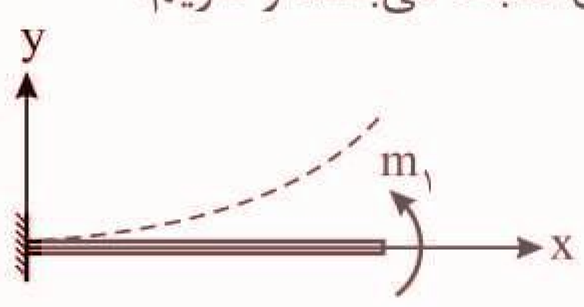




بردار لنگر روی مقطع همواره عمود بر امتداد بارگذاری بوده و در نتیجه بردار لنگر M عمود بر راستای قطر BD یعنی در راستای قطر AC می‌باشد. از طرفی محورهای اصلی مقطع محورهای (y,x) محورهای تقارن مقطع بوده و با کمی دقت می‌توان دریافت محور ضعیف مقطع (I_{min}) محور عمودی (y) می‌باشد (چرا؟) بنابراین مقطع تحت خمش ۲ محوره قرار داشته و می‌دانیم در مقاطع تحت اثر خمش دو محوره محور خنثی همواره بین بردار لنگر روی مقطع و محور ضعیف مقطع قرار گرفته و لذا گزینهٔ (۴) پاسخ صحیح خواهد بود.

۱۲- (۳) متوسط

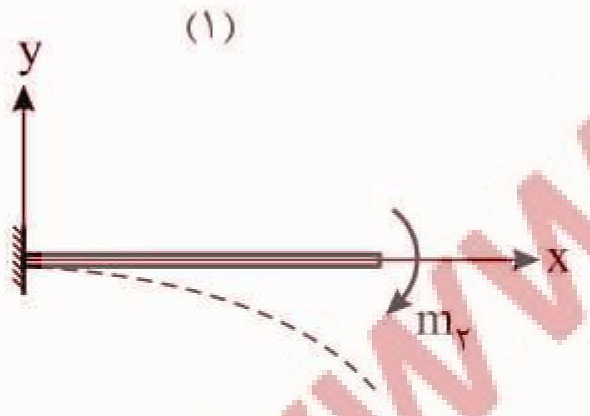
در بارگذاری (۱) انحناء مثبت است چرا که تقعر منحنی تغییرشکل به‌سمت yهای مثبت می‌باشد و داریم:



(۱)

$$k_۱(x) = \frac{۱}{۲۰}$$

در بارگذاری (۲) انحناء منفی بوده و داریم:



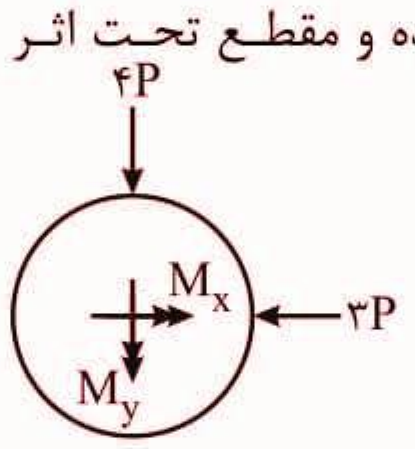
$$k_۲(x) = -\frac{۱}{۳۰}$$

از طرفی می‌دانیم استفاده از اصل جمع آثار در انحناء مجاز بوده و در شعاع انحناء غیرمجاز است و داریم:

$$k_{\text{جدید}} = k_۱ + k_۲ \Rightarrow \frac{۱}{\rho} = \frac{۱}{۲۰} + (-\frac{۱}{۳۰}) = \frac{۱}{۶۰} \Rightarrow \boxed{\rho_{\text{جدید}} = ۶۰\ m}$$

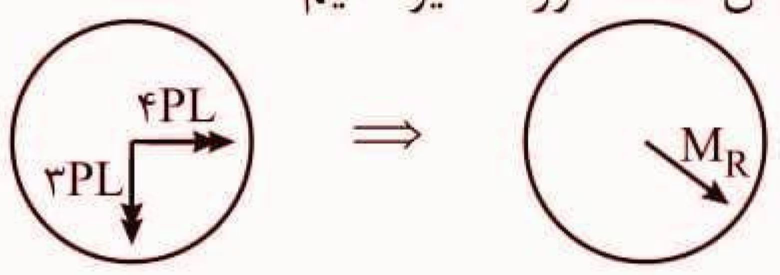
۱۳-(۴) متوسط

با کمی دقت می‌توان دریافت مقطع تیر در تکیه‌گاه دارای بیشترین لنگرهای خمشی بوده و مقطع تحت اثر خمش دو محوره می‌باشد.



$$M_x = ۴PL \quad , \quad M_y = ۳PL$$

از طرفی می‌دانیم برای محاسبهٔ تنش خمشی حداکثر در مقاطع دایروی تحت اثر خمش دو محوره ابتدا باید برآیند لنگرها را روی مقطع محاسبه کرده و مقطع را تحت اثر یک خمش تک محوره آنالیز کنیم:

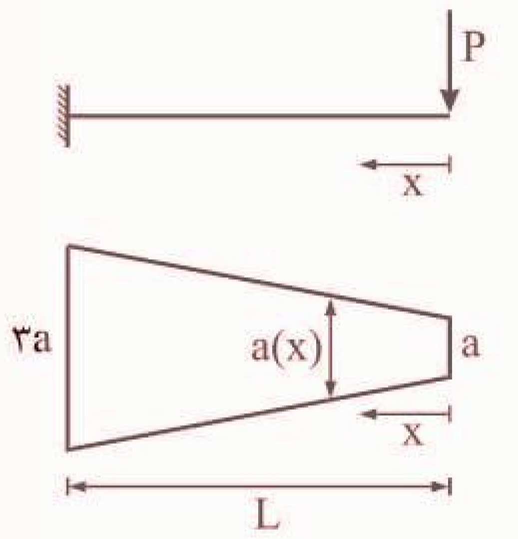


$$M_R = \sqrt{(۳PL)^۲ + (۴PL)^۲} = ۵PL$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_R \times R}{I} = \frac{۵PL \times R}{\frac{\pi}{۴}R^۴} = \frac{۲۰PL}{\pi R^۳} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{۲۰PL}{\pi R^۳}}$$

۱۴- (۱) دشوار

ابتدا باید مقطعی را بیابیم که تنش خمشی حداکثر در آن مقطع ماکزیمم مقدار را دارا باشد بدین منظور ابتدا معادله تنش حداکثر مقطع را برحسب یک متغیر x در طول تیر به‌دست می‌آوریم سپس از رابطهٔ $\sigma_{max}(x)$ نسبت به x مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا مقطع σ_{max} مشخص شود.



$$M(x) = P \times x$$

$$a(x) = a + \frac{۲a}{L}x = a(۱+\frac{۲x}{L})$$

$$S(x) = \frac{a^۳(x)}{۶}$$

$$\sigma_{max}(x) = \frac{M(x)}{S(x)} = \frac{Px}{\frac{a^۳(x)}{۶}} = \frac{۶Px}{a^۳(x)} = \frac{۶Px}{a^۳(۱+\frac{۲x}{L})^۳}$$

$$\frac{d\sigma_{max}(x)}{dx} = ۰ \Rightarrow ۱\times(۱+\frac{۲x}{L})^۳ - ۳\times\frac{۲}{L}(۱+\frac{۲x}{L})^۲ \times x = ۰$$

$$\Rightarrow (۱+\frac{۲x}{L})^۲(۱+\frac{۲x}{L}-\frac{۶x}{L}) = ۰ \Rightarrow x = \frac{L}{۴}$$

با جایگذاری مقدار x در رابطهٔ σ_{max} می‌توان تنش حداکثر را محاسبه کرد:

$$\sigma_{max}(x=\frac{L}{۴}) = \frac{۶P\times\frac{L}{۴}}{a^۳(۱+\frac{۲}{L}\times\frac{L}{۴})^۳} = \frac{۴PL}{۹a^۳} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{۴PL}{۹a^۳}}$$

۱۵- (۱) دشوار

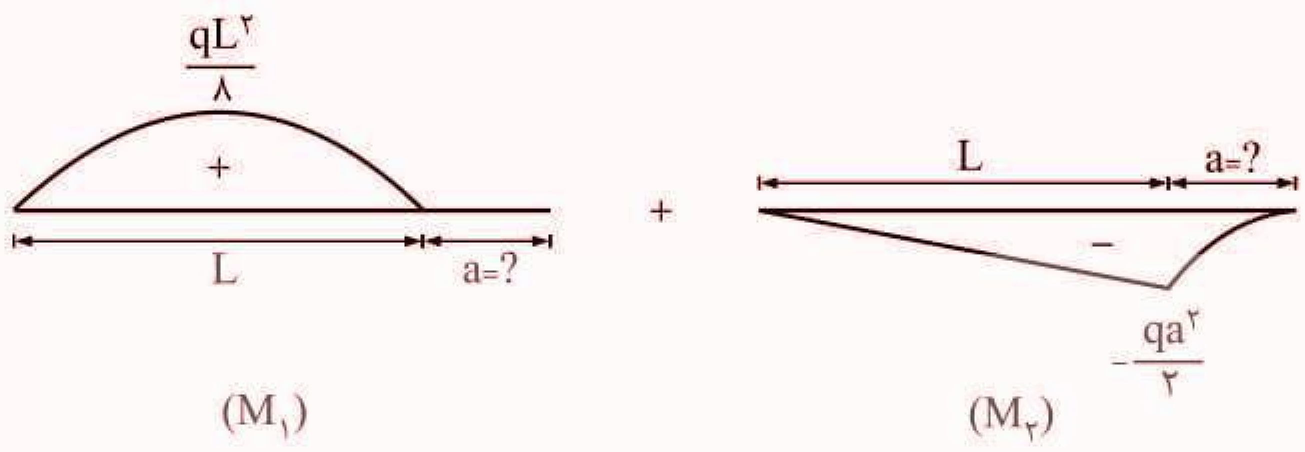
اگر تاری در فاصله y از محور خنثی قرار داشته باشد و محور طولی تیر x باشد، داریم:

$$\Delta L = \int dL = \int \varepsilon_x dx = \int \frac{\sigma_x}{E}dx = \int \frac{M(x)y}{EI}dx = \frac{y}{EI}\int M(x)dx = ۰$$

$$\Rightarrow \int_{x=۰}^{x=L+a} M(x)dx = ۰$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که سطح زیر نمودار لنگر خمشی در کل طول تیر باید برابر صفر باشد.

برای سهولت محاسبات یکبار فرض می‌کنیم که بار گسترده روی طول AB اعمال شده است و نمودار لنگر آن را رسم می‌کنیم $(M_۱)$ و بار دیگر فرض می‌کنیم که بار گسترده روی طول BC اعمال شده است و نمودار لنگر آن را رسم می‌کنیم $(M_۲)$



$$A_M = ۰ \Rightarrow \frac{۲}{۳}\times\frac{qL^۲}{۸}\times L = \frac{qa^۲}{۲}\times\frac{a}{۳}+\frac{۱}{۲}\times\frac{qa^۲}{۲}\times L \Rightarrow \frac{a^۳}{۶}+\frac{a^۲L}{۴}-\frac{L^۳}{۱۲}=۰ \Rightarrow ۲a^۳+۳a^۲L-L^۳=۰$$

$$\Rightarrow ۳a^۳+۳a^۲L-a^۳-L^۳=۰ \Rightarrow ۳a^۲(a+L)-(a^۳+L^۳)=۰$$

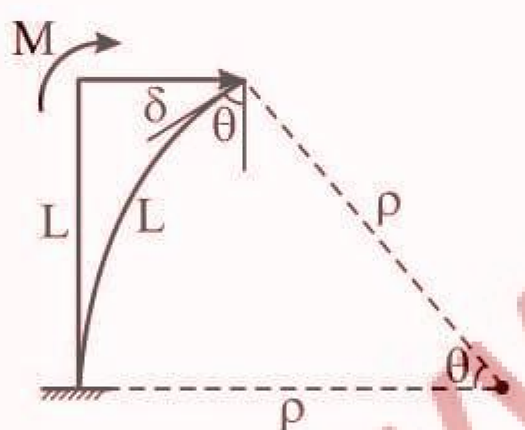
$$\Rightarrow ۳a^۲(a+L)-(a+L)(a^۲-aL+L^۲)=۰$$

$$\Rightarrow (a+L)\left[۳a^۲-(a^۲-aL+L^۲)\right]=۰ \Rightarrow (a+L)(۲a^۲+aL-L^۲)=۰$$

$$\Rightarrow (a+L)(۲a-L)(a+L)=۰$$

$$\Rightarrow (a+L)^۲(۲a-L)=۰ \Rightarrow ۲a-L=۰ \Rightarrow \boxed{a=\frac{L}{۲}}$$

۱۶- (۱) دشوار



$$\delta=\rho-\rho\cos\theta \qquad (۱)$$

$$\rho\times\theta=L \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \boxed{\delta=\frac{L}{\theta}(۱-\cos\theta)}$$

تذکر: لنگر خمشی در طول ستون ثابت بوده و در نتیجه تغییرشکل ستون به‌صورت کمانی از دایره می‌باشد و لذا شعاع انحناء (ρ) در طول ستون ثابت می‌باشد.

۱۷- (۲) متوسط

تیر داده شده تحت خمش مرکب (نیروی محوری و لنگر خمشی) قرار دارد و داریم:

$$N=P\cos ۴۵=P\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$M_{max}=\frac{(P\sin ۴۵)\times L\times ۲L}{۳L}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}PL$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} + \frac{N}{A} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}PL}{(\frac{\pi R^3}{4})} + \frac{P\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi R^2}$$

$$L = 10R \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{40\sqrt{2}}{3}\frac{P}{\pi R^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{P}{\pi R^2} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{83\sqrt{2}}{6}\frac{P}{\pi R^2}}$$

۱۸- (۱) ساده

مقطع تحت خمش دو محوره بوده و مقدار حداکثر تنش ناشی از خمش برابر است با:

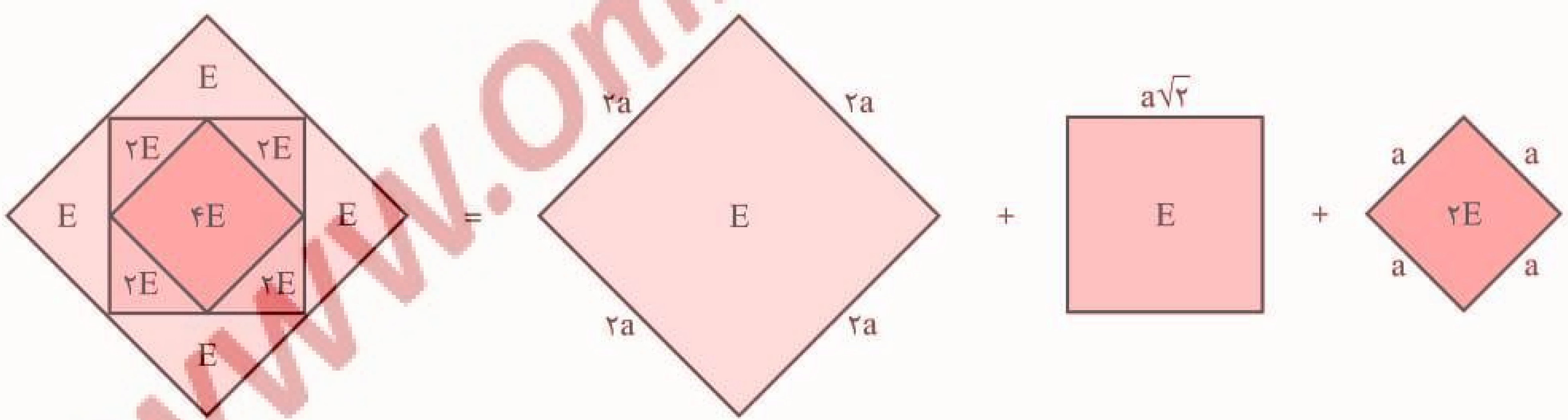
$$\sigma_{max} = \frac{M}{S_x} + \frac{2M}{S_y}$$

$$\begin{cases} S_x = \frac{bd^2}{6} \\ S_y = \frac{db^2}{6} \end{cases} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{M}{(\frac{bd^2}{6})} + \frac{2M}{\frac{db^2}{6}} \Rightarrow \sigma_{max} = \frac{6M}{bd}(\frac{1}{d} + \frac{2}{b})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} = \frac{6M}{bdE}(\frac{1}{d} + \frac{2}{b}) \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{max} = \frac{6M}{bdE}(\frac{1}{d} + \frac{2}{b})}$$

۱۹- (۱) دشوار

یک راه حل ابتکاری آن است که شکل را به‌صورت زیر ساده کنیم (توجه کنید که نسبت $n_i = \frac{E_i}{E}$ در یک مـاده به معنای جایگذاری ماده i، توسط ماده مرجع با مساحتی n_i برابر است):



$$\bar{I} = \frac{1}{12}(2a)^4 + \frac{1}{12}(a\sqrt{2})^4 + \frac{1}{12}a^4 \times 2 = \frac{16+4+2}{12} = \frac{11}{6}a^4$$

بیشترین تنش را در ماده ۴E و E در دورترین تار محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma_{(4E)} = \frac{M \times a\frac{\sqrt{2}}{2}}{\bar{I}} \times 4 \quad , \quad \sigma_{(E)} = \frac{M \times 2\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\bar{I}}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{4E} = \frac{2Ma\sqrt{2}}{\bar{I}} = \frac{2Ma\sqrt{2}}{\frac{11}{6}a^4} = \frac{12\sqrt{2}M}{11a^3} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{12\sqrt{2}}{11}\frac{M}{a^3}}$$

پاسخ تشریحی آزمون فصل پنجم

۱- (۲) ساده

حداکثر لنگر خمشی تیر در محل تکیه‌گاه B ایجاد می‌شود که برابر $\frac{PL}{۳}$ است. در طول بالکن BC مقدار برش برابر است با P و در طول عضو AB، مقدار برش برابر است با عکس‌العمل تکیه‌گاه A:

$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow R_A \times L + P \times \frac{L}{۳} = ۰ \Rightarrow R_A = -\frac{P}{۳}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در تکیه‌گاه A عکس‌العمل تکیه‌گاه A کششی و برابر $\frac{P}{۳}$ است. بنـابراین حـداکثر برش در طول تیر برابر P می‌باشد که با توجه به مستطیلی بودن مقطع داریم:

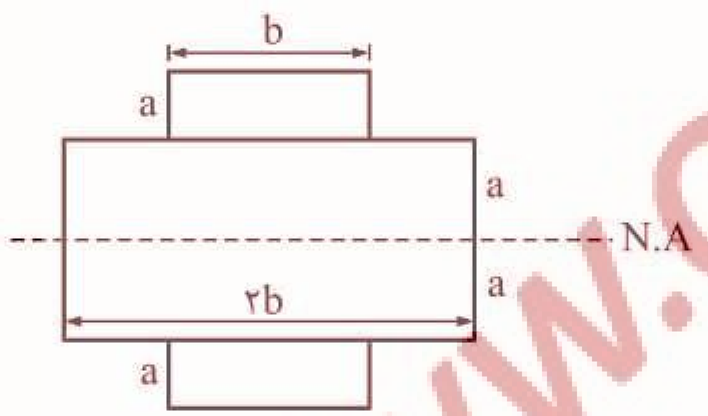
$$\tau_{max} = ۱/۵\,\tau_{ave} = ۱/۵\frac{P}{A} = ۱/۵\frac{P}{bh}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{\frac{PL}{۳}}{\frac{bh^۲}{۶}} = \frac{۲PL}{bh^۲} \Rightarrow \frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = \frac{\frac{۲PL}{bh^۲}}{۱/۵\frac{P}{bh}} = \frac{۴}{۳}\frac{L}{h} = \frac{۴}{۳}\times ۱۵ = ۲۰$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = ۲۰}$$

۲- (۳) ساده

مطابق با مقطع معادل نشان داده شده تنش برشی روی محور خنثی برابر است با:



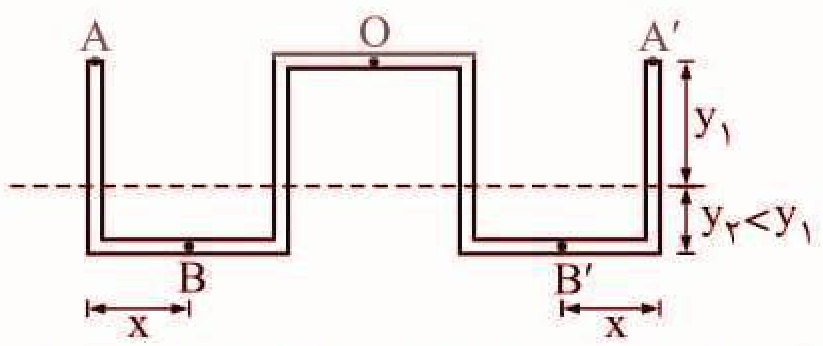
$$\tau_{N.A} = \frac{V \times Q_{N.A}}{\overline{I} \times b}$$

$$Q_{N.A} = (a \times b) \times (a + \frac{a}{۲}) + (a \times ۲b) \times (\frac{a}{۲}) \Rightarrow Q_{N.A} = \frac{۵}{۲}a^۲b$$

$$\overline{I} = \frac{b \times (۴a)^۳}{۱۲} + \frac{b \times (۲a)^۳}{۱۲} = ۶a^۳b$$

$$\Rightarrow \tau_{N.A} = \frac{V \times \frac{۵}{۲}a^۲b}{(۶a^۳b) \times b} = \frac{۵}{۱۲}\frac{V}{ab} \Rightarrow \boxed{\tau_{N.A} = \frac{۵}{۱۲}\frac{V}{ab}}$$

۳- (۱) متوسط



با توجه به اینکه مساحت جداره‌های افقی تحتـانی مقطـع (۲at) بزرگتر از مساحت جداره فوقانی مقطع (at) می‌باشد مرکز سـطح مقطع و در نتیجه محور خنثـی بـه پـایین مقطـع متمایـل اسـت (مانند شکل زیر). در نقاط ابتدایی جداره‌ها (نقاط A و A′) ممان استاتیک و در نتیجه تنش برشی برابر صفر است و به علت تقـارن مقطع در وسط جدار افقی مقطع (نقطه O) نیز ممان استاتیک و تنش برشی برابر صفر است. با توجه به موقعیت محور خنثی دیگر امکان صفر شدن تنش برشی در جداره‌هـای قـائم چـپ و راسـت وجـود نـدارد (چـون ممـان استاتیک نمی‌تواند صفر شود) و فقط در نقاط B و B′ از جداره‌های افقی تحتانی این اتفاق می‌تواند بیفتد.

تذکر: در هیچکدام از نقاط جداره‌های قائم میانی مقطع نیز ممان استاتیک و در نتیجه تنش برشی نمی‌تواند صفر شود. در نتیجه تنش برشی در جداره‌های قائم فقط در نقاط A و A' برابر صفر است.

۴- (۲) ساده

نقطه F مرکز برش مقطع می‌باشد که برای محاسبه دقیق محل آن در اینگونه مقاطع که جان مقطع قائم نیست و به‌صورت مایل می‌باشد می‌توان فاصله e را از رابطه $e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i}$ محاسبه کرد و فقط باید به‌جای $\bar{x}$ مقدار اصلی آن که نصف پهنای المان افقی بوده است قرار داده شود. برای محاسبه ممان اینرسی BCD می‌توان آن را با استفاده از قاعده لغزاندن مقطع، مستطیلی به ضخامت $\frac{0/4\,\text{cm}}{\frac{8}{10}}$ و ارتفاع ۱۶cm در نظر گرفت.

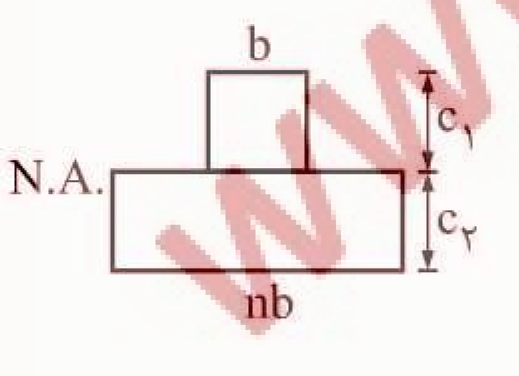
$$I_{AB} = Ad^2 = (12 \times 0/4) \times (8 - \frac{0/4}{2})^2 = 4/8 \times 7/8^2 = 292\,\text{cm}^4$$

$$I_{BCD} = \frac{1}{12} \times \frac{0/4}{\frac{8}{10}} \times 16^3 = \frac{1}{12} \times 0/5 \times 16^3 = 170/7\,\text{cm}^4$$

$$e = \frac{\sum I_i \bar{x}_i}{\sum I_i} = \frac{2 \times 292 \times \frac{12}{2}}{2 \times 292 + 170/7} = \frac{3504}{754} = 4/6\,\text{cm} \Rightarrow \boxed{e = 4/6\,\text{cm}}$$

۵- (۱) دشوار

با تبدیل قسمت فشاری مقطع به قسمت کششی، موقعیت محور خنثی و سپس ممان اینرسی مقطع به‌دست می‌آید. توجه داریم که تنش برشی ماکزیمم در محل محور خنثی که ممان استاتیک ماکزیمم است، به‌وجود می‌آید. با فرض اینکه قسمت تحتانی مقطع تحت فشار باشد، داریم:



$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow nb \times c_2 \times \frac{c_2}{2} = b \times c_1 \times \frac{c_1}{2}$$

$$c_1^2 = nc_2^2 \Rightarrow c_1 = \sqrt{n}\,c_2 \quad , \quad c_1 + c_2 = h$$

$$c_1 = c_t = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} h \quad , \quad c_2 = c_c = \frac{h}{\sqrt{n}+1}$$

$$Q_{max} = bc_1 \times \frac{c_1}{2} = \frac{b}{2} c_1^2 = \frac{b}{2} \times (\frac{\sqrt{n}h}{\sqrt{n}+1})^2 = \frac{nbh^2}{2(\sqrt{n}+1)^2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \times \frac{4n}{(\sqrt{n}+1)^2} \quad , \quad \tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{Ib} = \frac{V \times \frac{nbh^2}{2(\sqrt{n}+1)^2}}{\frac{bh^3}{12} \times \frac{4n}{(\sqrt{n}+1)^2} \times b} = \boxed{1/5 \frac{V}{bh}}$$

۶- (۱) متوسط

با توجه به اینکه در انتهای راست تیر تکیه‌گاه گیردار غلتکی وجود دارد که قادر به تحمل برش نیست نتیجه می‌شود که عکس‌العمل تکیه‌گاه A برابر qL است و بنابراین حداکثر برش تیر نیز همین مقدار می‌باشد. برای محاسبه لنگر خمشی ماکزیمم تیر با توجه به وجود تکیه‌گاه گیردار غلتکی در انتهای تیر، می‌توان کل تیر را نسبت به B قرینه کرد و در این‌صورت یک تیر دو سر گیردار به طول ۲L تحت اثر بار گسترده q حاصل می‌شود که لنگر خمشی ماکزیمم آن در تکیه‌گاه‌هایش ایجاد شده و مقدار آن برابر $M_A = M_{max} = \frac{q(۲L)^۲}{۱۲} = \frac{qL^۲}{۳}$ می‌باشد.

$$\tau_{max} = \frac{۴}{۳}\tau_{ave} = \frac{۴}{۳}\frac{V}{A} = \frac{۴}{۳}\frac{qL}{\pi r^۲} = \tau_w \qquad (۱)$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{S} = \frac{\frac{qL^۲}{۳}}{\frac{۱}{۴}\pi r^۳} = \frac{۴}{۳}\frac{qL^۲}{\pi r^۳} = \sigma_w \qquad (۲)$$

$$(۲)\div(۱) \Rightarrow \frac{L}{r} = \frac{\sigma_w}{\tau_w} \Rightarrow \frac{L}{\frac{D}{۲}} = \frac{۲L}{D} = \frac{\sigma_w}{\tau_w} \Rightarrow \boxed{\frac{L}{D} = \frac{۱}{۲}\frac{\sigma_w}{\tau_w}}$$

۷- (۳) متوسط

تنش‌های برشی و عمودی ناشی از نیروی برشی و نیروی محوری برابر است با:

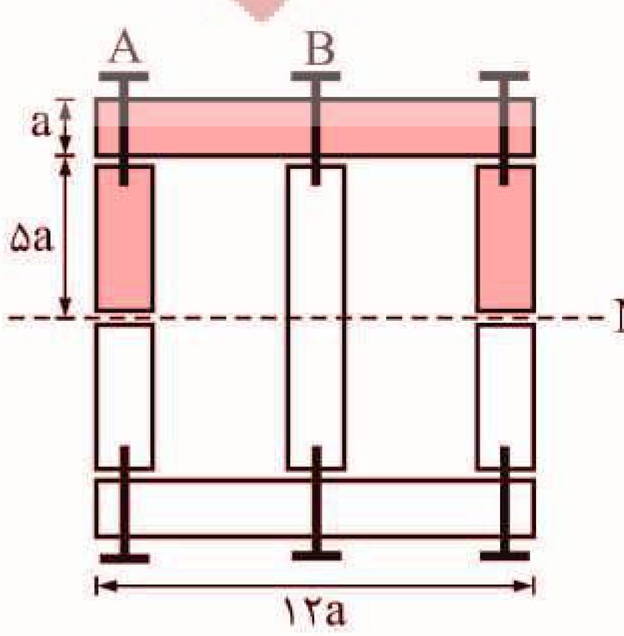
$$V = P \Rightarrow \tau_{max} = \frac{۳}{۲}\frac{V}{A} = \frac{۳}{۲}\frac{P}{\frac{b\times h}{۲}} = ۳\frac{P}{bh} \quad , \quad N = ۴P \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A} = \frac{۴P}{\frac{b\times h}{۲}} = ۸\frac{P}{bh}$$

حداکثر تنش عمودی ناشی از ترکیب تنش برشی و تنش عمودی برابر است با:

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R = \frac{\sigma+۰}{۲} + \sqrt{\left(\frac{\sigma-۰}{۲}\right)^۲ + (\tau)^۲} \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = ۹\frac{P}{bh}}$$

۸- (۳) متوسط

برای محاسبه برش وارده بر میخ B ممان استاتیک قسمت هاشورخورده شکل زیر می‌بایست در نظر گرفته شود در حالی‌که برای محاسبه برش وارده بر میخ A صرفاً ممان استاتیک الوار عمودی زیر میخ A باید در نظر گرفته شود.



$$F = \frac{VQ}{I}\times S \Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{Q_A}{Q_B}\times\frac{S_A}{S_B} = \frac{Q_A}{Q_B}\times\frac{۲S_B}{S_B} = \frac{۲Q_A}{Q_B}$$

$$= ۲\times\frac{۵a\times a\times ۲/۵a}{۲\times(۵a\times a\times ۲/۵a) + ۱۲a\times a\times ۵/۵a} = ۲\times\frac{۱۲/۵a^۳}{۹۱a^۳} = ۰/۲۷$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{F_A}{F_B} = ۰/۲۷}$$

۹- (۳) متوسط

تنش برشی ناشی از لنگر پیچشی و تنش عمودی ناشی از لنگر خمشی برابر است با:

$$\tau=\frac{T}{۲A_m\times t}=\frac{T}{۲\times\pi R^{۲}\times t}$$

$$\sigma=\frac{M\times C}{I}=\frac{T\times R}{\pi R^{۳}t}=\frac{T}{\pi R^{۲}t}$$

حداکثر تنش برشی ایجاد شده ناشی از ترکیب تنش‌ها برابر است با:

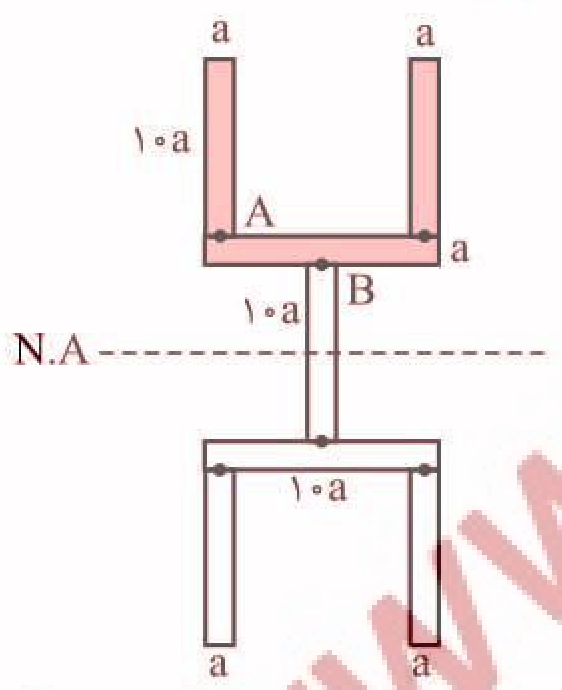
$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma-۰}{۲}\right)^{۲}+(\tau)^{۲}}=\sqrt{\left(\frac{T}{۲\pi R^{۲}t}\right)^{۲}+\left(\frac{T}{۲\pi R^{۲}t}\right)^{۲}}\Rightarrow\boxed{\tau_{max}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\frac{T}{\pi R^{۲}t}}$$

۱۰- (۳) دشوار

در چسب‌های A و B تنش‌های برشی باید محاسبه و مقایسه شود و عملاً محاسبه تنش در هر دو نقطه الزامی است. ممان استاتیک متناظر تنش برشی چسب در A مربوط به سطح بالای چسب A می‌باشد.

$$\tau_A=\frac{VQ_A}{It_A}=\frac{V\times(۱۰a\times a)\times\left(\frac{۱۰a}{۲}+a+\frac{۱۰a}{۲}\right)}{I\times a}=\frac{۱۱۰Va^{۲}}{I}$$

ممان استاتیک متناظر تنش برشی چسب در B در شکل زیر هاشورخورده است و داریم:



$$Q_B=۲Q_A+Q_{\text{افقی}}$$

$$=۲\times\left[(۱۰a\times a)\times\left(\frac{۱۰a}{۲}+a+\frac{۱۰a}{۲}\right)\right]+۱۲a\times a\times\left(\frac{۱۰a}{۲}+\frac{a}{۲}\right)=۲\times۱۱۰a^{۳}+۶۶a^{۳}=۲۸۶a^{۳}$$

$$\tau_B=\frac{VQ_B}{It_B}=\frac{V\times۲۸۶a^{۳}}{I\times۲a}=\frac{۱۴۳Va^{۲}}{I}$$

$$(\tau_{max})_{\text{چسب}}=\max(\tau_A,\tau_B)=\max\left(\frac{۱۱۰Va^{۲}}{I},\frac{۱۴۳Va^{۲}}{I}\right)=\frac{۱۴۳Va^{۲}}{I}$$

$$\Rightarrow\boxed{\tau_{max}^{\text{چسب}}=۱۴۳\frac{Va^{۲}}{I}}$$

۱۱- (۲) ساده

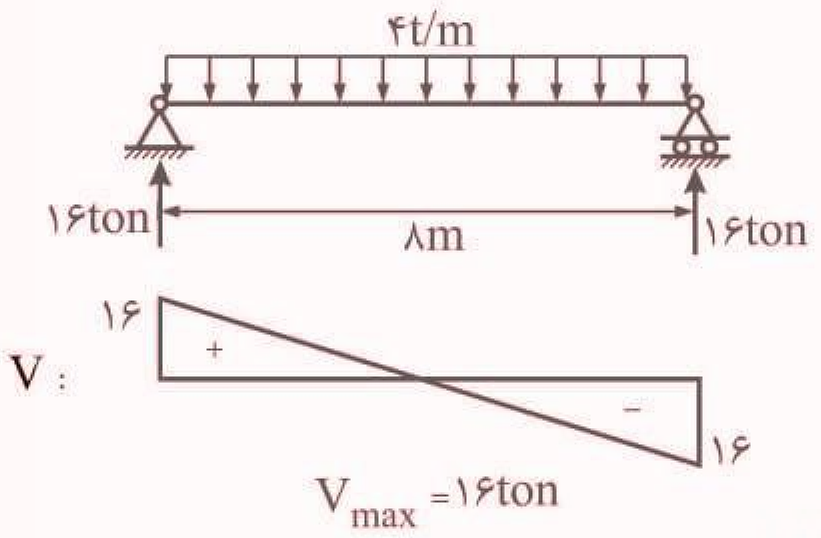
چسب بحرانی در مقطع با توجه به زوج بودن n، چسبی است که دقیقاً روی محور خنثی قرار گرفته و بنابراین برای محاسبهٔ تنش حداکثر ایجاد شده در چسب این چسب را در نظر می‌گیریم که تنش حداکثر آن با استفاده از τ_{max} مقاطع مستطیلی روی محور خنثی به صورت $\frac{3}{2}\times\frac{V_{max}}{A}$ خواهد بود. از طرفی برش حداکثر در تیر $\frac{P}{2}$ می‌باشد.

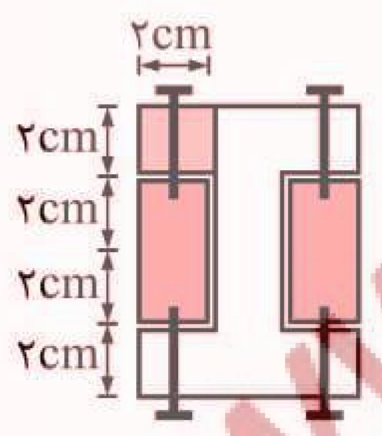
$$\tau_{max}^{\text{چسب}}=\frac{3}{2}\times\frac{V_{max}}{A}=\frac{3}{2}\times\frac{\frac{P}{2}}{n\times bh}=\tau_{all}^{\text{چسب}}=\tau_0$$

$$\Rightarrow \boxed{P=\frac{4}{3}nbh\tau_0}$$

۱۲- (۱) دشوار

ابتدا برش حداکثر در طول تیر را به‌دست می‌آوریم و در ادامه با استفاده از رابطهٔ زیر فاصلهٔ مجاز هر یک از پیچ‌ها را در امتداد طول تیر، محاسبه می‌کنیم:





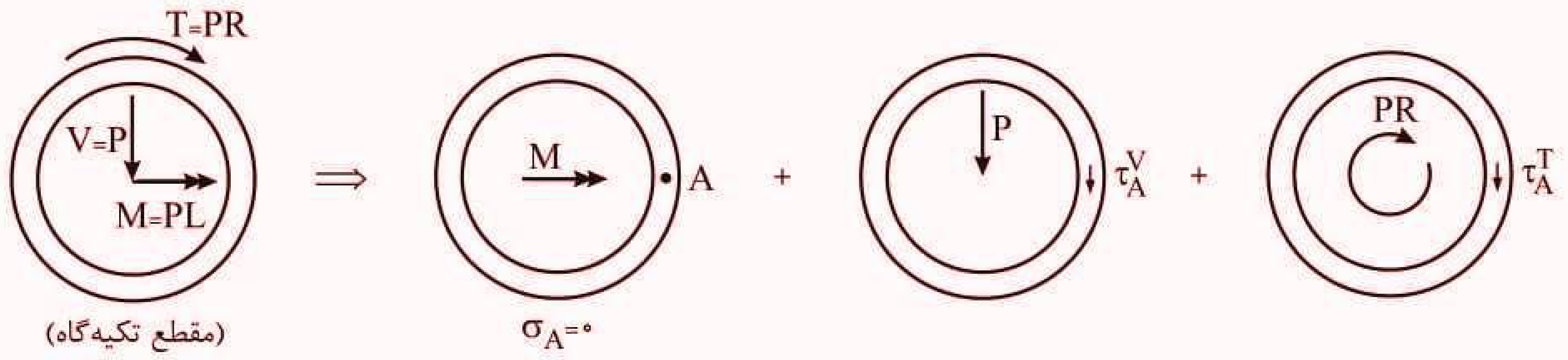
$$\frac{V_{max}\times Q}{I}\times S\le F_{\text{یک پیچ}}$$

$$Q=2\times2\times3=12\,cm^3$$

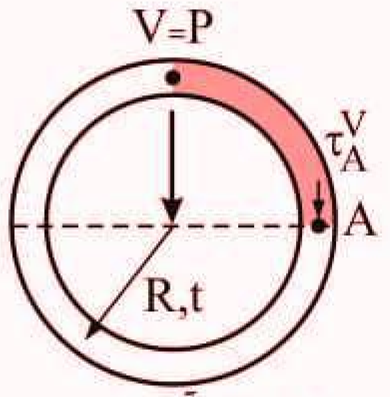
$$I=\frac{6\times8^3}{12}=256\,cm^4\Rightarrow\frac{16000\times12}{256}\times s\le3000\Rightarrow\boxed{S\le4}$$

۱۳- (۴) متوسط

مقطع تیر در تکیه‌گاه تحت اثر لنگر پیچشی، لنگر خمشی و برش قرار دارد.



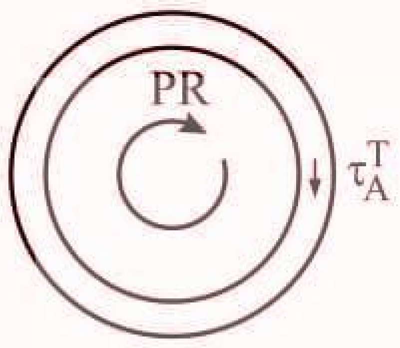
در ادامه، تنش برشی نقطهٔ A را تحت اثر برش و پیچش به‌صورت زیر خواهیم داشت:



$$\tau_A^V = \frac{V}{I}\times\frac{Q}{t} = \frac{P}{\pi R^3 t}\times\frac{\frac{\pi}{2}Rt\times\frac{2R}{\pi}}{t} = \frac{P}{\pi Rt}$$

$$\tau_A^T = \frac{T}{2A_m t_A} = \frac{PR}{2\times\pi R^2\times t} = \frac{P}{2\pi Rt}$$

سپس با استفاده از اصل جمع آثار می‌توان برآیند تنش‌های برشی در نقطهٔ A را به‌صورت زیر به‌دست آورد:



$$\tau_A = \tau_A^V + \tau_A^T = \frac{P}{\pi Rt} + \frac{P}{2\pi Rt} = \frac{3P}{2\pi Rt}$$

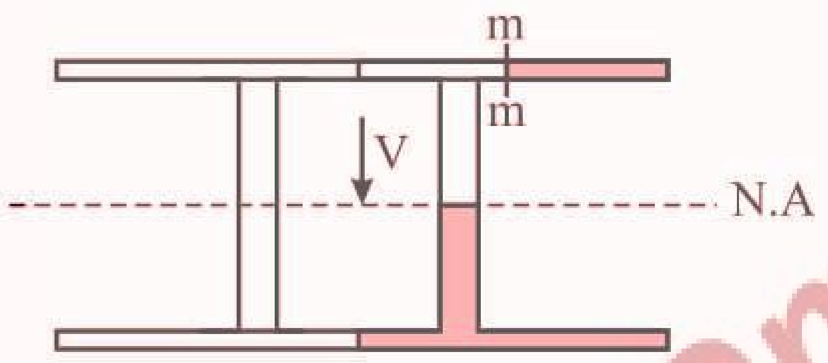
$$\tau_A = \tau_0 \Rightarrow \frac{3P}{2\pi Rt} = \tau_0 \Rightarrow P = \frac{2\pi}{3}Rt\tau_0$$

در نهایت زاویهٔ پیچش سر آزاد میله را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Phi = \frac{TL}{GJ} = \frac{PR\times L}{GJ} = \frac{\frac{2\pi}{3}\times Rt\times\tau_0\times R\times L}{G\times 2\pi R^3 t} = \frac{\tau_0 L}{3GR} \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{\tau_0 L}{3GR}}$$

۱۴- (۴) متوسط

ممان استاتیک مربوط به هر دو مقطع موردنظر که برای محاسبه تنش برشی به کار می‌رود مطابق شکل زیر می‌باشد:



$$\frac{\tau_{m-m}}{\tau_{N.A}} = \frac{\frac{V\times Q_{m-m}}{I\times t_{m-m}}}{\frac{V\times Q_{N.A}}{I\times t_{N.A}}} = \frac{Q_{m-m}}{Q_{N.A}}\times\frac{t_{N.A}}{t_{m-m}}$$

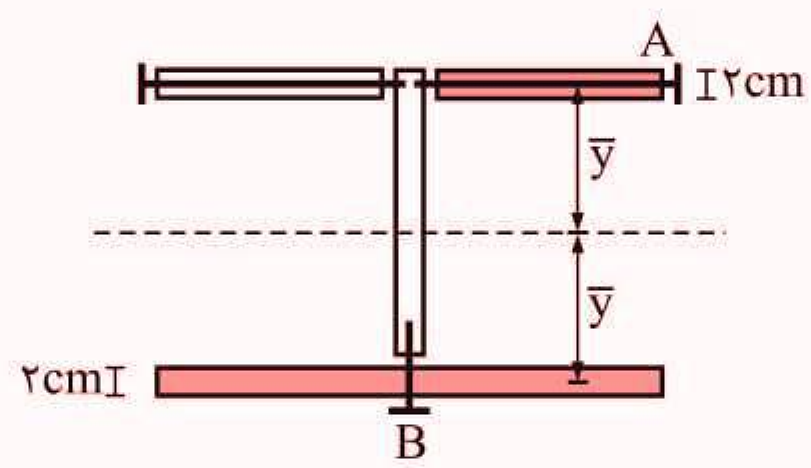
$$Q_{m-m} = (10\times 1)\times(\frac{16}{2}+\frac{1}{2}) = 85\,cm^3$$

$$Q_{N.A} = [(10+2+4)\times(\frac{16}{2}+\frac{1}{2})+(8\times 2)\times 4] = 200\,cm^3$$

$$\frac{\tau_{m-m}}{\tau_{N.A}} = \frac{85}{200}\times\frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{m-m}}{\tau_{N.A}} = \frac{17}{20}}$$

۱۵- (۴) متوسط

برای محاسبه نیروی برشی میخ‌ها نیاز به ممان استاتیک مربوط به محل اتصال میخ‌های A و B مطابق با شکل داریم:



$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{\frac{V\times Q_A}{I}\times e_A}{\frac{V\times Q_B}{I}\times e_B} = \frac{Q_A}{Q_B}\times\frac{e_A}{e_B}$$

$$\Rightarrow \frac{F_A}{F_B} = \frac{(8\times 2)\times\bar{y}}{(17\times 2)\times\bar{y}}\times\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{F_A}{F_B} = \frac{4}{17}}$$

۱۶- (۲) متوسط

کنترل قطعه مستطیلی:
$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{V}{A}\le 2\tau_{\circ}\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}\frac{V}{(3a\times b)}\le 2\tau_{\circ}\ \Rightarrow\ V\le 4ab\times\tau_{\circ}$$

کنترل چسب:
$$\tau_{\text{چسب}}=\frac{V\times Q}{I\times b}\le\tau_{\circ}$$
$$Q=(a\times b)\times(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})=a^2b\quad,\quad I=\frac{b\times(3a)^3}{12}=\frac{9}{4}ba^3$$
$$\Rightarrow\ \frac{V\times a^2b}{\frac{9}{4}ba^3\times b}\le\tau_{\circ}\ \Rightarrow\ \boxed{V\le\frac{9}{4}ab\times\tau_{\circ}}$$

بنابراین چسب کنترل‌کننده می‌باشد و ظرفیت برش قائم مقطع برابر با $\frac{9}{4}ab\times\tau_{\circ}$ می‌باشد.

۱۷- (۱) متوسط

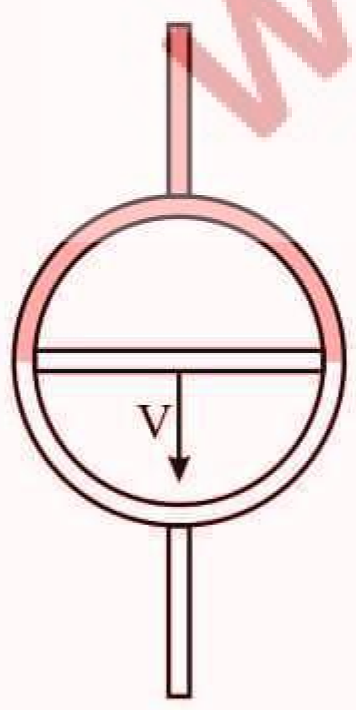
ابتدا مرکز سطح مقطع (محل عبور تار خنثی) را نسبت به ضلع BC به‌دست می‌آوریم:
$$\bar{y}=\frac{\sum A_i\,\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{(2a\times t)\times 3\times a+(2a\times t)\times 2a}{(4a\times t)+(2a\times t)+3\times(2a\times t)}=\frac{5}{6}a$$

در فاصله x از B در جدار BC در محلی که ممان استاتیک صفر می‌باشد، تنش برشی نیز صفر می‌گردد بنابراین داریم:
$$(\frac{7}{6}a\times t)\times\frac{7}{12}a=(\frac{5}{6}a\times t)\times\frac{5}{12}a+(x\times t)\times\frac{5}{6}a\ \Rightarrow\ \boxed{x=0.4a}$$

۱۸- (۲) متوسط

با توجه به اینکه برش در راستای قائم بر مقطع واقع می‌شود، لنگر خمشی متناظر افقی بوده و محور خنثی مقطع نیز روی قطر افقی مقطع دایروی منطبق می‌شود و عملاً المان افقی که بر روی محور خنثی قرار گرفته است هیچ تأثیری در ممان اینرسی مقطع و همچنین برش مقطع نخواهد داشت.

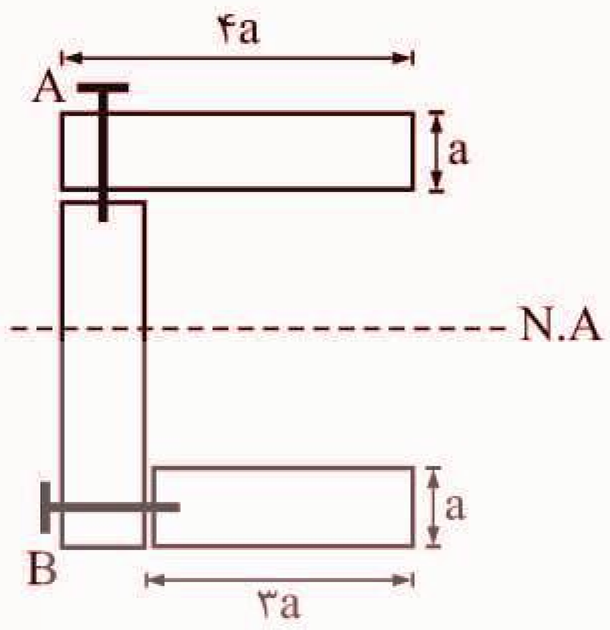
برای محاسبه تنش برشی ماکزیمم مقطع که در محل برخورد محور خنثی با مقطع دایروی اتفاق می‌افتد باید سطح هاشورخورده زیر در محاسبه ممان استاتیک Q در نظر گرفته شود و البته توجه داریم که این برش از دو ضخامت یکسان t جاری می‌شود.



$$I=\pi R^3t+2\left[\frac{tR^3}{12}+tR(R+\frac{R}{2})^2\right]=\pi R^3t+\frac{14}{3}R^3t=(\pi+\frac{14}{3})R^3t$$
$$Q=\sum A_i\,y_i=(\pi Rt)\times\frac{2R}{\pi}+Rt\times(R+\frac{R}{2})=2R^2t+\frac{3}{2}R^2t=\frac{7}{2}R^2t$$
$$\tau_{max}=\frac{VQ}{I(t+t)}=\frac{V\times(\frac{7}{2}R^2t)}{(\pi+\frac{14}{3})R^3t\times 2t}=\frac{21}{12\pi+56}\frac{V}{Rt}=0.22\frac{V}{Rt}$$
$$\Rightarrow\ \boxed{\tau_{max}=0.22\frac{V}{Rt}}$$

۱۹- (۳) متوسط

نسبت نیروی ایجاد شده در میخ A به B برابر است با:



$$\frac{F_A}{F_B}=\frac{\frac{V\times Q_A}{I}\times e_A}{\frac{V\times Q_B}{I}\times e_B}=\frac{Q_A}{Q_B}\times\frac{e_A}{e_B}$$

$$Q_A=(۴a\times a)\times ۲a=۸a^۳$$

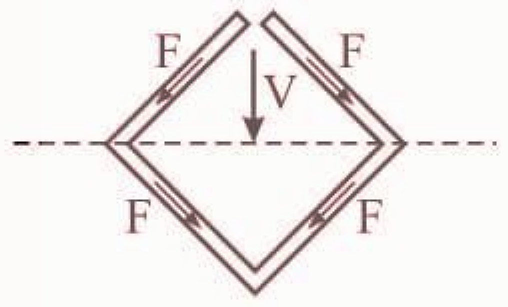
$$Q_B=(۳a\times a)\times ۲a=۶a^۳$$

$$e_A=\frac{۱}{۲}e_B$$

$$\Rightarrow\ \frac{F_A}{F_B}=\frac{۸a^۳}{۶a^۳}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۲}{۳}\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{F_A}{F_B}=\frac{۲}{۳}}$$

۲۰- (۴) دشوار

در مقطع دوم تقارن کامل بر مقطع و بارگذاری آن حاکم است و دو محور تقارن داریم که نتیجه می‌شود نیروی برشی هر چهار وجه مقطع یکسان است که اگر نیروی برشی وجوه مقطع را F بنامیم با توجه به تعادل مقطع در راستای قائم داریم:

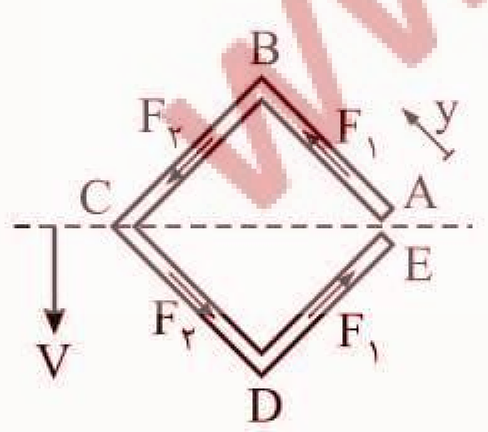


$$\sum F_y=۰\ \Rightarrow\ ۴\times F\times\sin ۴۵-V=۰\ \Rightarrow\ F=\frac{V}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}\,V}{۴}$$

در مقطع اول که فقط یک محور تقارن دارد، محاسبه نیروی برشی وجوه دشوارتر است. به علت وجود محور تقارن افقی، نیروی برشی وجوه AB و DE با یکدیگر برابر است و همچنین نیروی برشی وجوه BC و CD نیز با یکدیگر برابر است. با محاسبه نیروی برشی وجه AB و استفاده از تقارن می‌توان با توجه به تعادل مقطع در راستای قائم، نیروی وجه BC را محاسبه کرد.

اگر برای وجه AB، مبدأ محور y را انتهای A در نظر بگیریم، داریم:

$$I=d(\frac{a^۴}{۱۲})=\frac{۱}{۳}a^۳da=\frac{۱}{۳}a^۳\times ۲t\ \Rightarrow\ I_{box}=\frac{۲}{۳}a^۳t$$



$$Q(y)=A\bar{y}=ty\times\frac{y}{۲}\sin ۴۵=\frac{\sqrt{۲}}{۴}ty^۲$$

$$\tau(y)=\frac{VQ(y)}{It}=\frac{V\times\frac{\sqrt{۲}}{۴}ty^۲}{\frac{۲}{۳}a^۳t\times t}=\frac{۳\sqrt{۲}}{۸}\frac{Vy^۲}{a^۳t}$$

$$F_1=\int_{AB}\tau(y)\,dA=\int_{AB}\tau(y)\times t\,dy=\int_0^a \frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{Vy^2}{a^3t}\times t\,dy=\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{V}{a^3}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a=\frac{3\sqrt{2}}{8}\frac{V}{a^3}\times\frac{a^3}{3}$$

$$\Rightarrow\ F_1=\frac{\sqrt{2}}{8}V$$

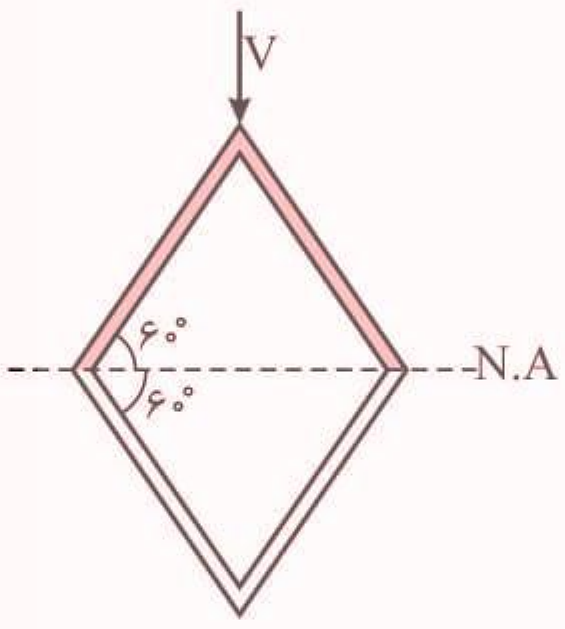
$$\sum F_y=0\ \Rightarrow\ 2F_2\sin 45-2F_1\sin 45=V$$

$$\Rightarrow\ F_2=F_1+\frac{V}{2\sin 45}=F_1+\frac{V}{\sqrt{2}}=F_1+\frac{\sqrt{2}}{2}V=\frac{\sqrt{2}}{8}V+\frac{\sqrt{2}}{2}V=\frac{5\sqrt{2}}{8}V$$

$$\frac{(V_{BC})_1}{(V_{BC})_2}=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{8}V}{\frac{\sqrt{2}}{4}V}=\frac{5\times 4}{8}=\frac{5}{2}=2/5\ \Rightarrow\ \boxed{\frac{(V_{BC})_1}{(V_{BC})_2}=2/5}$$

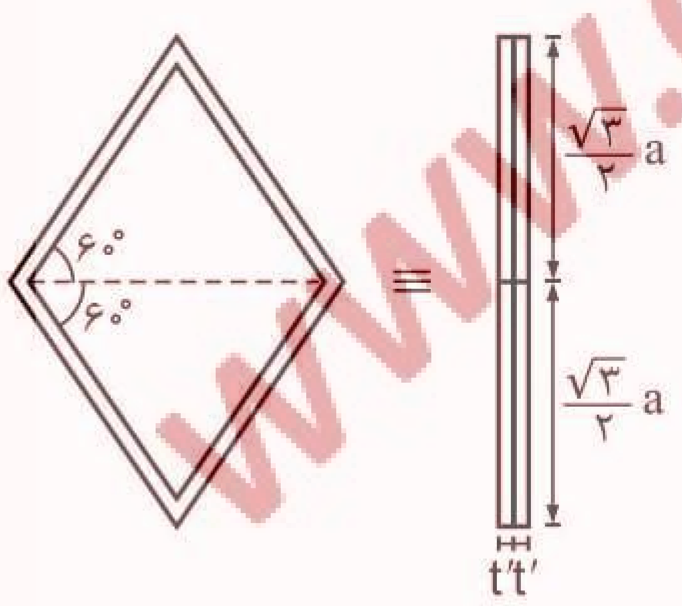
۲۱- (۳) متوسط

با توجه به اینکه مقطع داده شده یک مقطع جدار نازک با ضخامت ثابت t است، نتیجه می‌شود که تنش برشی ماکزیمم در وسط ارتفاع مقطع و روی محور خنثی به‌وجود می‌آید و داریم:



$$\tau_{max}=\frac{VQ_{max}}{I\times(2t)}\quad,\quad Q_{max}=\sum A\bar{y}=2\times at\times(\frac{1}{2}a\sin 60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2t$$

در ادامه برای محاسبهٔ ممان اینرسی مقطع، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:



(۱) (۲)

$$A_1=A_2\ \Rightarrow\ 4at=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\times t'\ \Rightarrow\ t'=\frac{2}{\sqrt{3}}t$$

$$I=\frac{2t'\times(\sqrt{3}a)^3}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}t'a^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}ta^3\ \Rightarrow\ I=ta^3$$

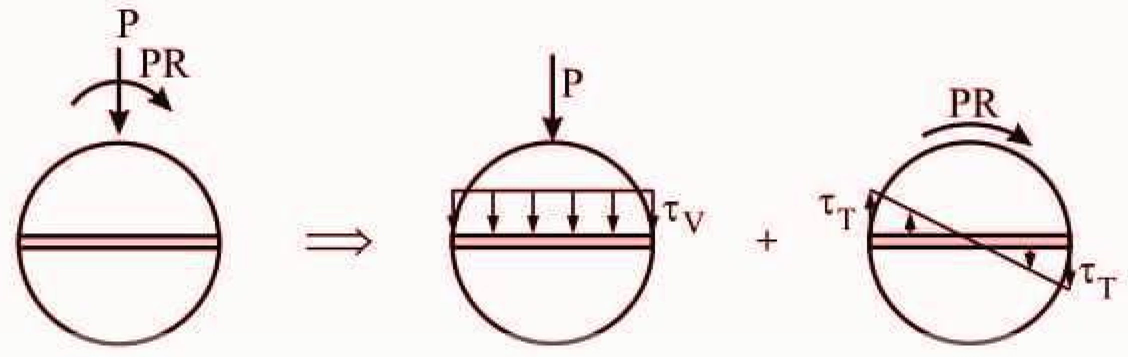
و در نهایت داریم:

$$\tau_{max}=\frac{VQ_{max}}{I\times 2t}=\frac{V\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2t}{ta^3\times 2t}=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{V}{at}=\sqrt{3}\frac{V}{\underbrace{4at}_{A}}=\sqrt{3}\frac{V}{A}$$

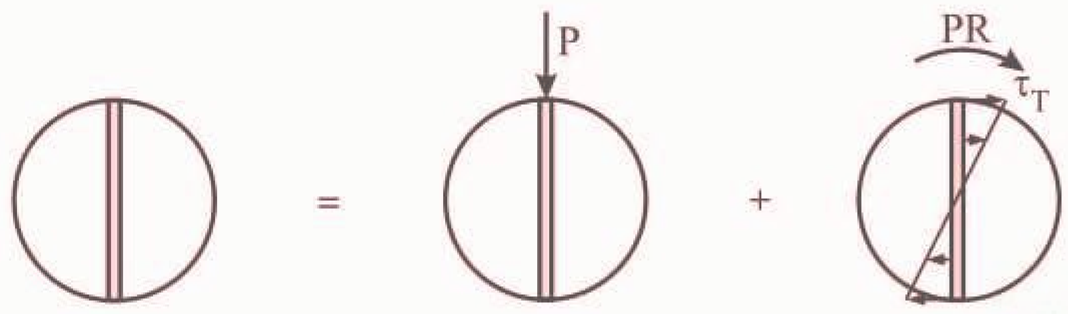
$$\Rightarrow\ \boxed{\tau_{max}=\sqrt{3}\frac{V}{A}}$$

۲۲-(۱) متوسط

با اندکی دقت می‌توان دریافت در هر دو حالت (۱) و (۲) مقطع تحت اثر برش و پیچش توأم قرار گرفته است. اما در حالت (۲) تنش برشی در چسب ناشی از برش صفر بوده و فقط پیچش در چسب تنش برشی تولید می‌کند.

(۱)


$$\tau_{max_1} = \tau_V + \tau_T = \frac{4}{3} \times \frac{P}{\pi R^2} + \frac{(PR)\times R}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{10P}{3\pi R^2}$$

(۲)


$$\tau_{max_2} = \tau_V + \tau_T = 0 + \frac{PR \times R}{\frac{\pi}{2} R^4} = \frac{2P}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tau_{max_1}}{\tau_{max_2}} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{max_1}}{\tau_{max_2}} = \frac{5}{3}}$$