بسم الله الرحمن الرحيم

پیشگفتار مولف

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

ستایش ایزد منان را که بار دیگر با لطف خود توفیق نشر دانش هر چند اندک اینجانب را فراهم نمود. مجموعه پیش‌رو حاصل سال‌ها تدریس مؤلف در دانشگاه و مؤسسات آموزش عالی می‌باشد که از ویژگی‌های این اثر می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- ✓ درسنامه کامل و جامع همراه با مسائل طبقه‌بندی شده و متنوع
- ✓ ارائه روش ابتکاری «چراجویی» توسط مؤلف در بخش درسنامه کتاب
- ✓ پوشش بهینه سؤالات آزمون‌های کارشناسی ارشد و دکتری در انتهای هر فصل
- ✓ پاسخ کاملاً تشریحی و مفصل برای تمام تمرین‌ها و سؤالات مطرح شده در کتاب
- ✓ قابل استفاده برای دانشجویان مقطع کارشناسی و داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد و دکتری

بر خود لازم می‌دانم که از تمام همکاران خود در انتشارات «عمران پایه» که در به ثمر رسیدن این اثر نقش مؤثری داشتند، کمال قدردانی و تشکر را به‌عمل آورم. همچنین به منظور هر چه پربارتر شدن مطالب این مجموعه از تمام خوانندگان عزیز خواهشمند هستم نظرات و پیشنهادات اصلاحی خود را از طریق سایت www.omranpayeh.com ارسال نمایند تا در چاپ‌های بعدی نواقص کتاب برطرف گردد.

پنام زرفام

www.Pzarfam.com

فهرست

فصــل اول:
درجــه نامعینی و پایداری ســازه

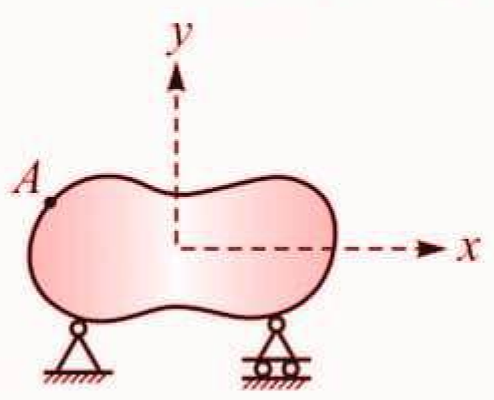
مقدمه

یکی از مهمترین مباحث تحلیل سازه‌ها تعیین درجه نامعینی سازه و پایدار یا ناپایدار بودن آن است. زیـرا نحـوه برخورد با سازه‌های معین و نامعین با هم متفاوت بوده و برای تحلیل هر کدام نیازمند روش‌های خاصـی هـستیم که در فصل‌های بعد با آنها آشنا خواهیم شد. در این فصل نحوهٔ محاسبه درجه نامعینی در سـازه‌هـا و روش‌هـای تعیین پایداری سازه را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱- بررسی معادلات تعادل یک سازه در صفحه

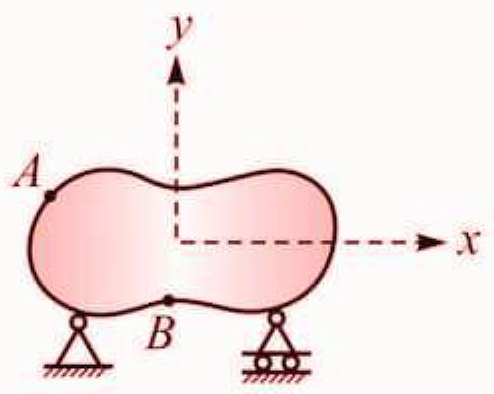
سازهٔ در حال تعادل سازه‌ای است که تحت اثر نیروهای خارجی، تمام قسمت‌هـای آن نـسبت بـه زمـین سـاکن بـاقی می‌ماند. به منظور تحلیل سازه‌های دوبعدی متعادل، معادلات تعادل سازه به‌صورت‌های زیر نوشته می‌شوند:

۱- تعادل در راستای دو محور دلخواه و تعادل دورانی حول یک نقطه دلخواه



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases}$$
(A : نقطه‌ای دلخواه در صفحه)

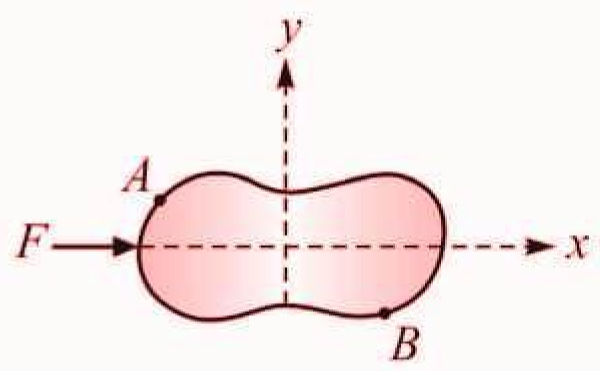
۲- تعادل در راستای یک محور دلخواه و تعادل دورانی حول دو نقطهٔ دلخواه



$$\begin{cases} \sum M_A = 0 \\ \sum M_B = 0 \\ \sum F_x = 0 \end{cases}$$
(x : محور دلخواه بررسی تعادل)

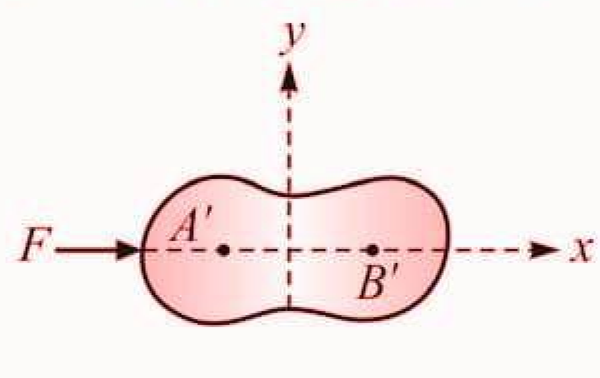
باید دقت شود در این حالت، امتداد خط واصل دو نقطه (مثلاً خط AB)، نباید بـر امتـداد محـور دلخـواه (مـثلاً محور x) عمود باشد.

تذکر: در سازه‌های نامتعادل اگر محور و دو نقطه به درستی انتخـاب شـوند، معـادلات تعـادل هـیچ‌گـاه برقـرار نمی‌گردند. حال جهت درک بهتر این موضوع، به شکل‌های زیر توجه کنید:



شکل (I)

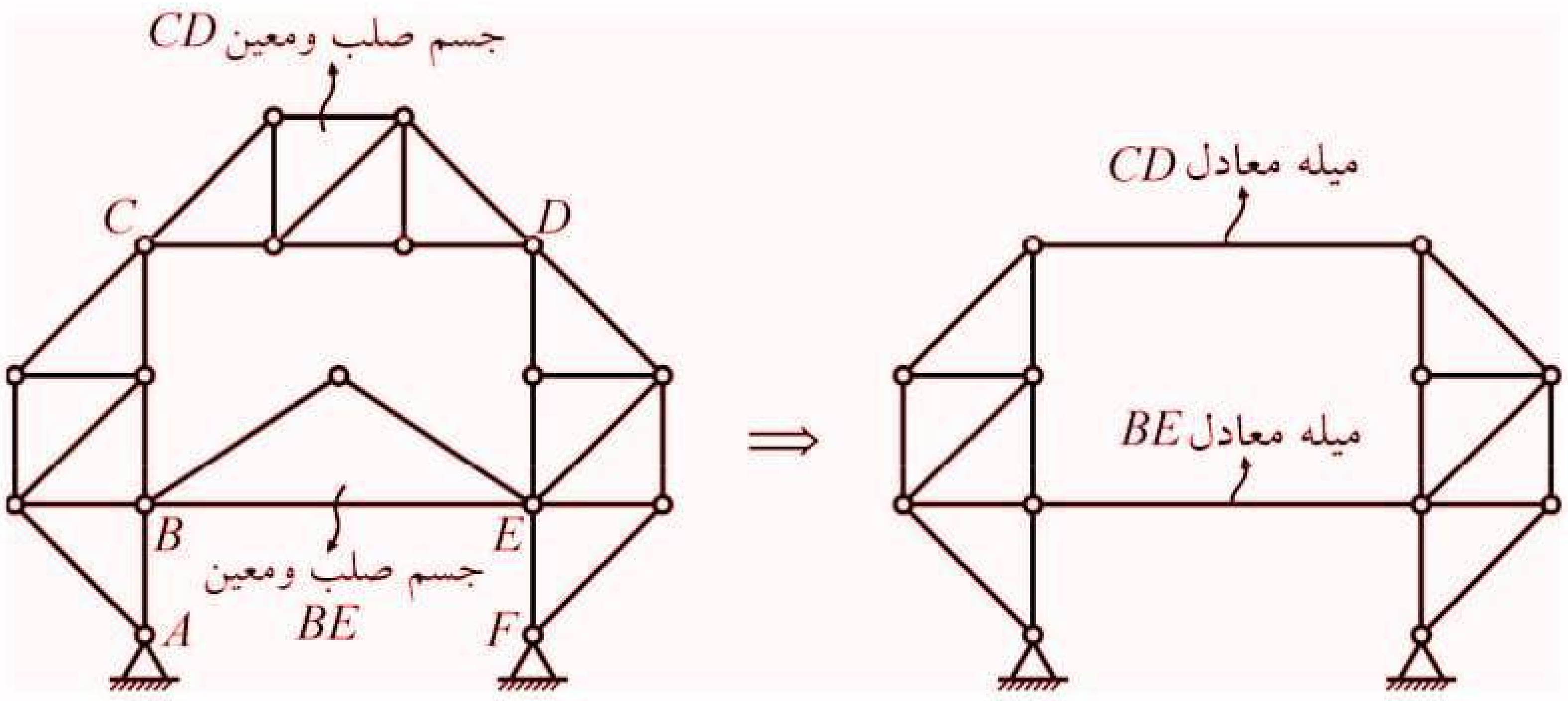
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum M_A \neq 0 \\ \sum M_B \neq 0 \end{cases}$$



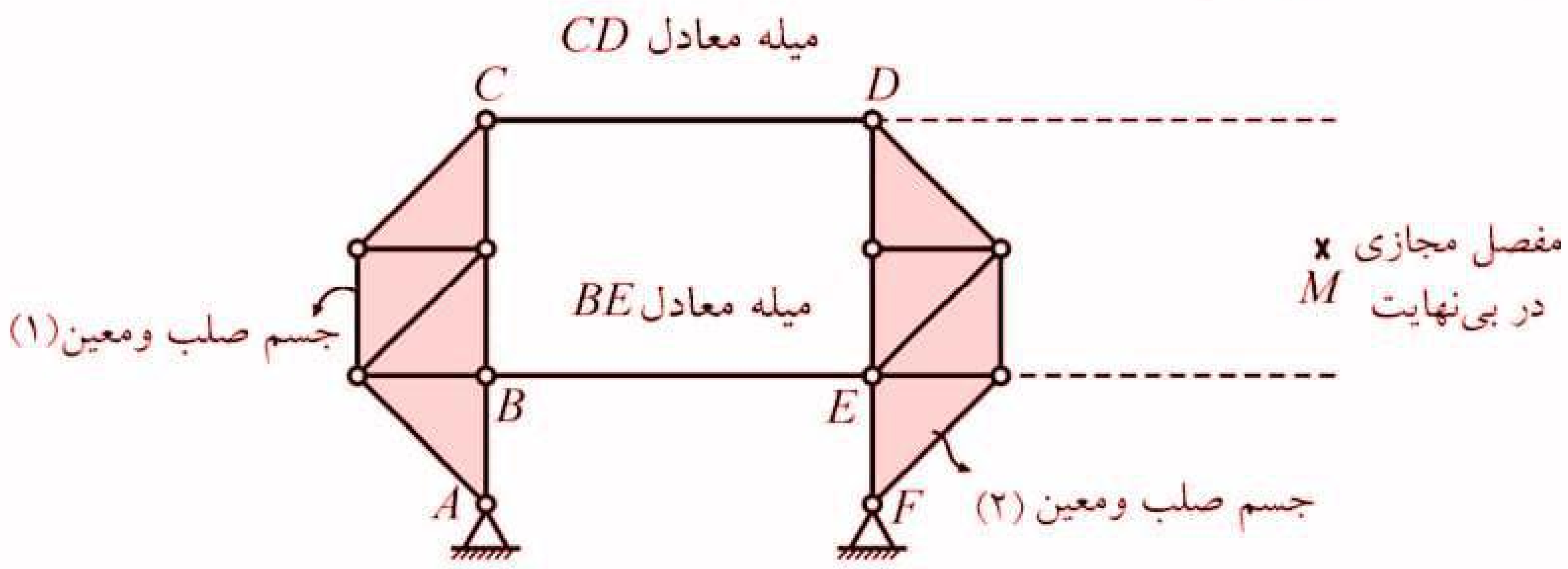
شکل (II)

$$\begin{cases} \sum M_{A'} = 0 \\ \sum M_{B'} = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

در شکل (I) با انتخاب درست محور و نقاط، عدم تعادل سازه اثبات می‌شود (زیرا معادلات تعادل دورانـی برقـرار نمی‌باشند). در شکل (II) با انتخاب نادرست محور و نقاط، عدم تعادل سازه اثبات نمی‌شود زیـرا در ایـن حالـت امتداد $A'B'$ بر محور y ها عمود است.

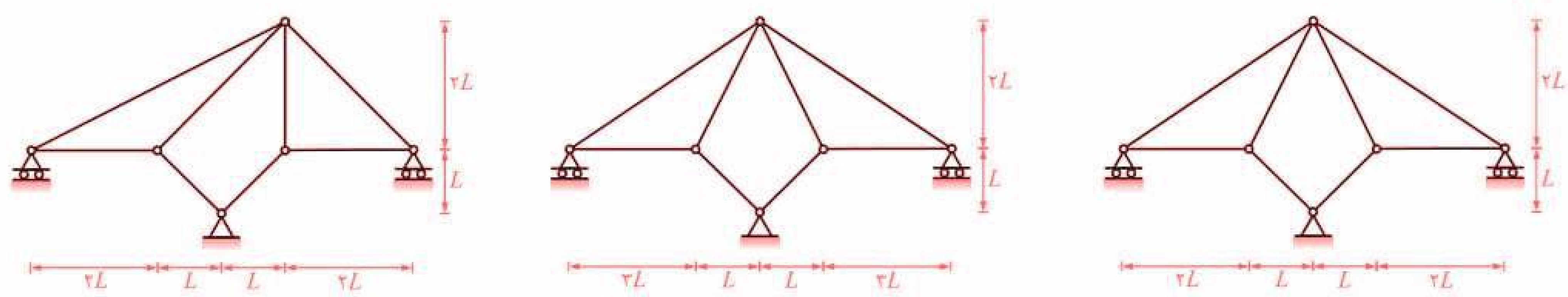


در شکل جدید جسم‌های صلب و معین (۱) و (۲) در نقاط A و F به زمین متصل شده و این دو جسم توسط دو میلهٔ موازی به یکدیگر متصل شده‌اند. امتداد این دو میله در بی‌نهایت تشکیل یک مفصل مجازی داده و خط واصل A و F در بی‌نهایت از نقطهٔ M عبور می‌کند.



در این سازه دو جسم صلب و معین با سه مفصل واقع در یک راستا به زمین و به یکدیگر متصل شده‌اند و سازه ناپایدار هندسی می‌باشد.

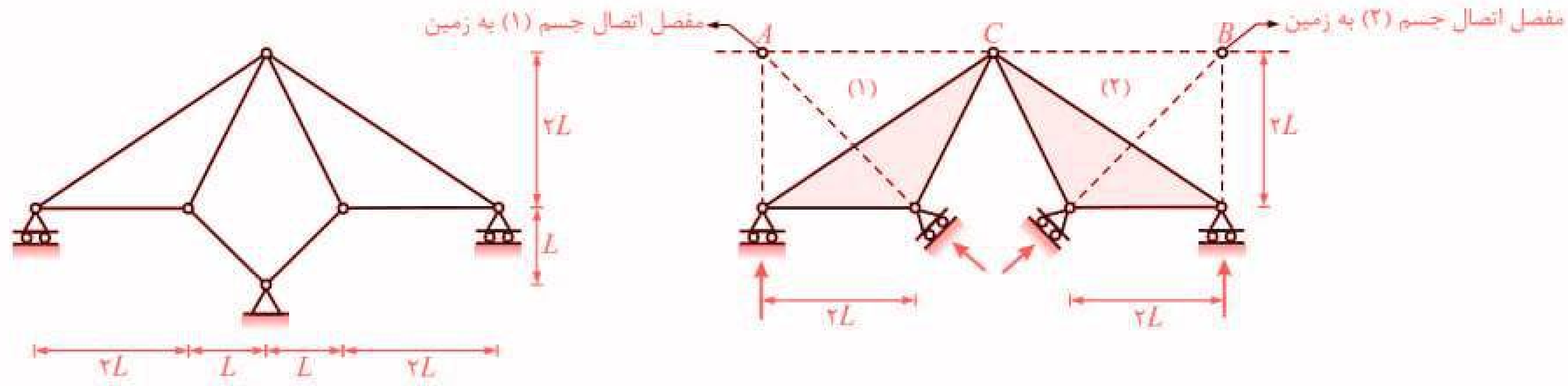
تمرین ۲۶: از سه سیستم سازه خرپایی زیر، چند شکل پایدار است؟ (دکتری - ۹۶)



۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

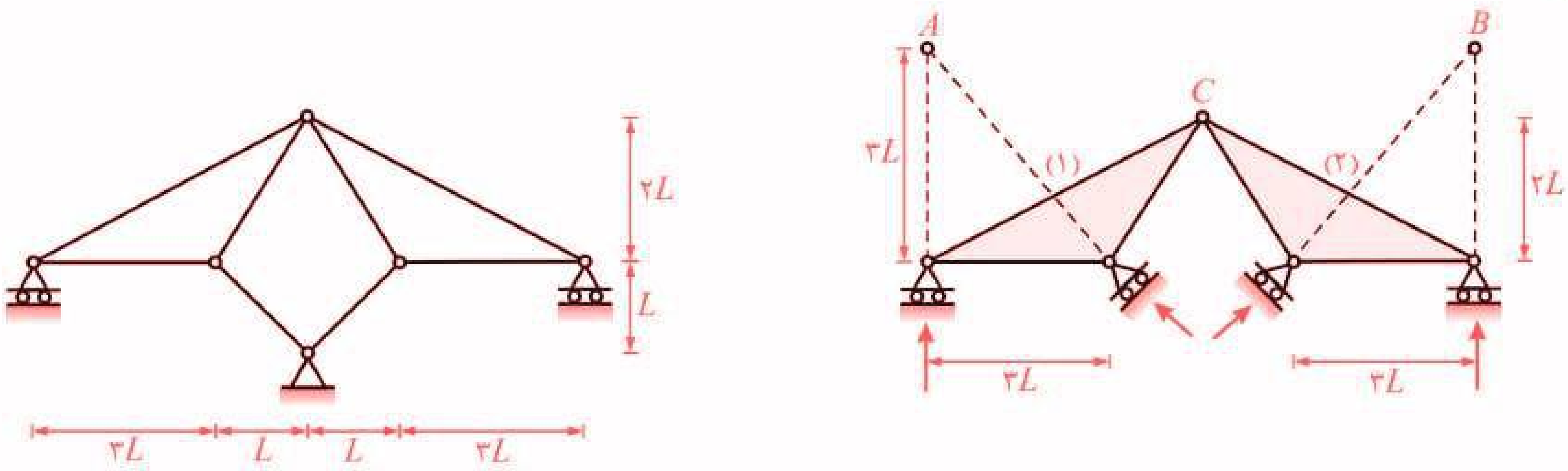
حل: برای تحلیل پایداری در این خرپاها، کافی است اعضای خرپایی متصل به تکیه‌گاه مفصلی میانی را با تکیه‌گاه‌های غلتکی معادل‌سازی کنیم. از طرفی می‌دانیم محل برخورد دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی نیرویی، روی یک جسم صلب خرپایی، تشکیل یک مفصل مجازی را می‌دهد که در صورتی‌که مفاصل مجازی دو جسم چپ و راست با مفصل اتصال واقعی میانی در امتداد یک خط راست قرار گیرند، یک سازهٔ سه مفصل ناپایدار ایجاد خواهد شد.

بررسی خرپای اول:



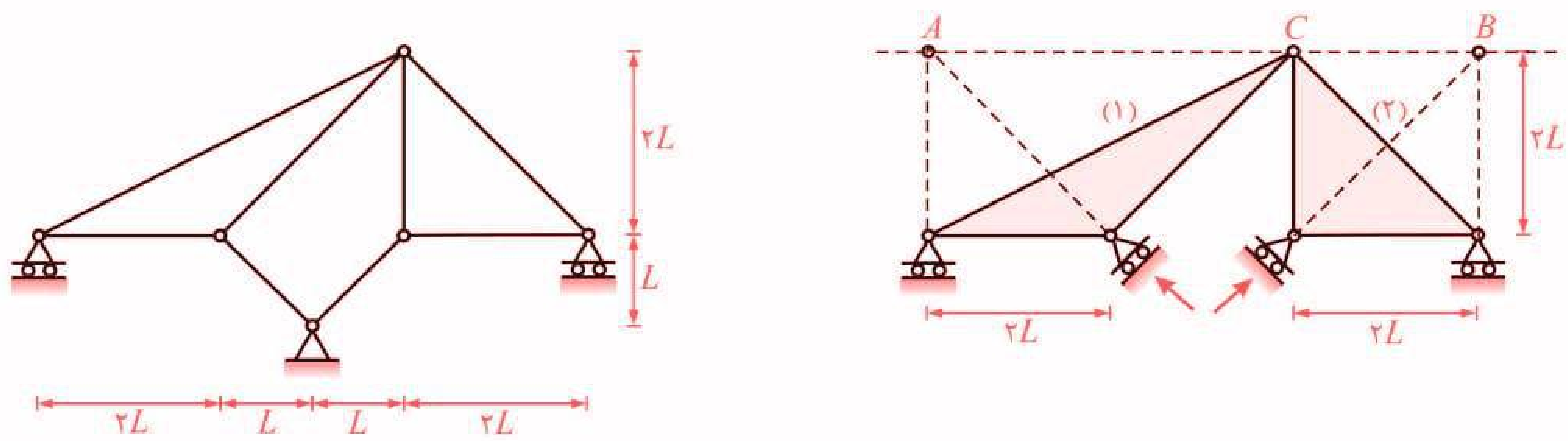
همانگونه که مشاهده می‌شود، محل برخورد دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی در هر جسم صلب خرپایی مفاصل موهومی A و B را مطابق شکل تشکیل می‌دهند که با مفصل واقعی C در یک راستا قرار گرفته و در نتیجه خرپا ناپایدار خواهد بود.

بررسی خرپای دوم:



همانگونه که مشاهده می‌شود، محل برخورد دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی در هر جسم صلب خرپایی، مفصل موهومی A و B را مطابق شکل تشکیل می‌دهند که با مفصل واقعی C در یک راستا قرار نگرفته و در نتیجه خرپا پایدار است.

بررسی خرپای سوم:

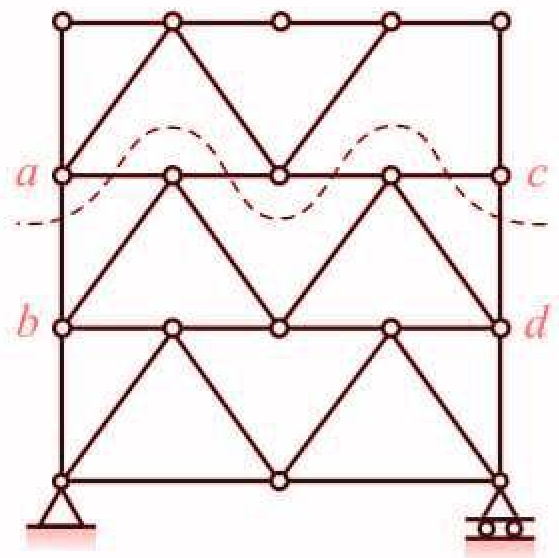


همانگونه که مشاهده می‌شود، محل برخورد دو عکس‌العمل تکیه‌گاهی در هر جسم صلب خرپایی مفاصل موهومی A و B را مطابق شکل تشکیل می‌دهند که با مفصل واقعی C در یک راستا قرار گرفته و لذا خرپا ناپایدار خواهد بود. با توجه به این توضیحات، در نهایت فقط خرپای دوم پایدار بوده و گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح است.

۲-۶-۴- بررسی خرپای K شکل

این خرپا برای ساخت پل‌های با دهانهٔ بیش از ۱۰۰ متر کاربرد دارد. جنس اعضاء این خرپا معمولاً فولادی بوده و پس از به‌دست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، مقاطع زیر باعث تسهیل در محاسبهٔ نیروهای داخلی اعضاء خرپا می‌شود.



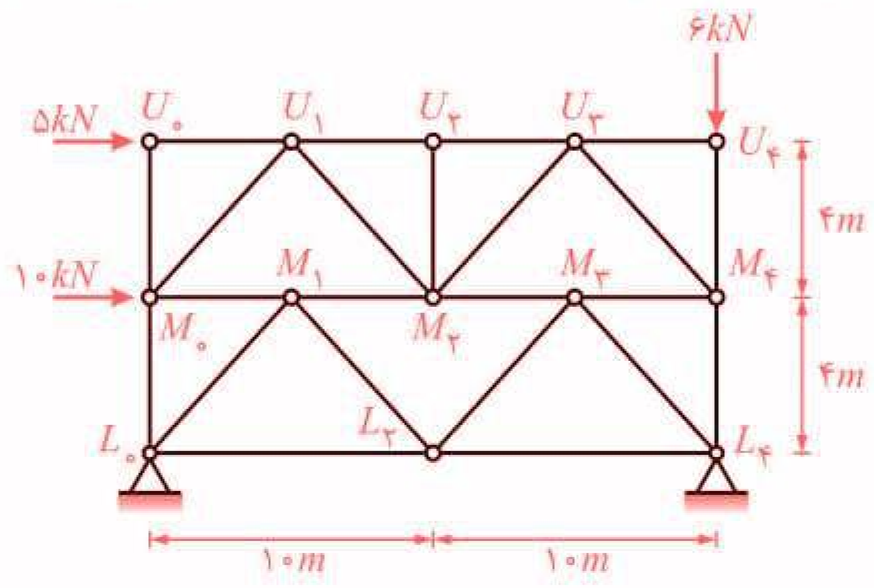
نکته: تحلیل خرپا به روش مقطع، مستلزم انتخاب مقطع و برش مناسب می‌باشد. در برخی از خرپاها انتخاب برش مناسب، کمک شایانی به حل مسئله می‌نماید. برای مثال خرپای شکل مقابل را درنظر بگیرید. با استفاده از معادلات تعادل روی کل خرپا، نیروهای مجهول با برش‌های نشان داده شده در شکل مقابل محاسبه می‌شوند:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum M_a = 0 \Rightarrow F_{cd} \text{ به‌دست می‌آید.} \\ \sum M_c = 0 \Rightarrow F_{ab} \text{ به‌دست می‌آید.} \end{cases}$$

با انتخاب این مقطع و نقطه مناسب برای لنگرگیری نیروی همه اعضای افقی از نقطه موردنظر عبور کرده و لنگری نخواهند داشت.

پس از انجام مروری سریع بر روی نکات کلی حل خرپا، کاربرد این نکات را در تست‌های بعدی مرور می‌کنیم.

تمرین ۱۷: نیروی داخلی در عضو M_0L_0 در خرپای شکل زیر، برحسب kN چقدر است؟ (سراسری - ۹۱)

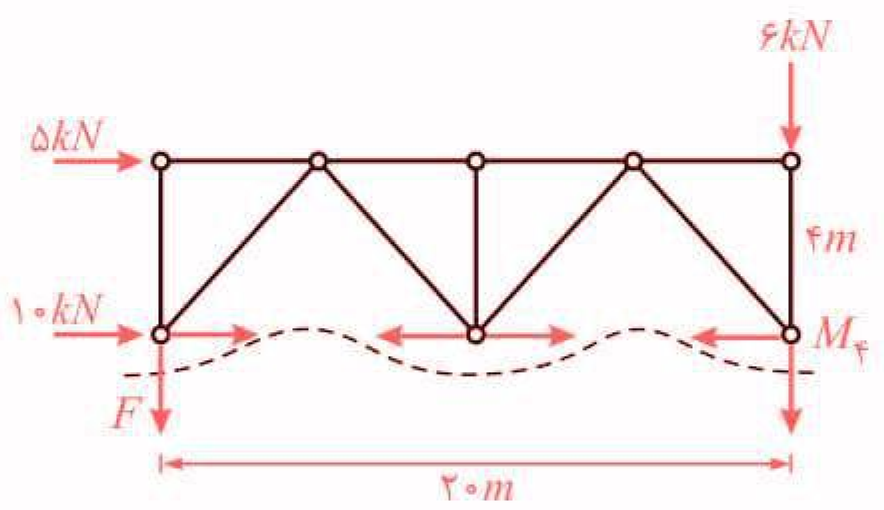


۱) ۱۰ فشاری

۲) ۱ کششی

۳) ۵ فشاری

۴) صفر



حل: خرپای موردنظر از خانوادهٔ خرپاهای K شکل می‌باشد. با توجه به اینکه عضو M_0L_0 از اعضای عمود بر دهانهٔ K شکل می‌باشد با انتخاب مقطع مناسب مطابق شکل زیر و با استفاده از معادلهٔ تعادل لنگر خواهیم داشت:

$$\sum M_{M_4} = 0 \Rightarrow 5 \times 4 - F \times 20 = 0 \Rightarrow F = 1\text{kN}$$

توجه داشته باشید که بعد از مقطع زدن از مقطع پایین نیز می‌توانید برای حل استفاده کنید اما با توجه به اینکه باید عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را برای آن قسمت محاسبه کنید، بدیهی است انتخاب مقطع بالایی سرعت حل سؤال را افزایش خواهد داد. بنابراین گزینهٔ (۲) صحیح خواهد بود.

چراجویی: در خرپای تمرین قبل نیروی عضو M_2U_3 را به دست آورید.

● راهنمایی: عضو M_2U_2 صفر نیرویی است. پس از حذف آن از مقطع افقی استفاده نمایید.

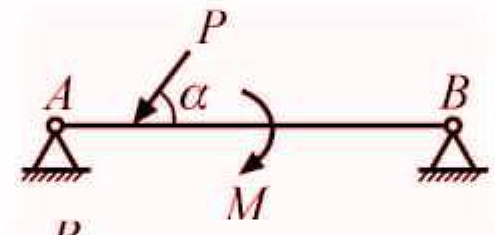
(پاسخ: $F=-\frac{\sqrt{41}}{4}$)

۲-۷- بررسی علت‌های ایجاد نیروی داخلی در اعضاء سازه

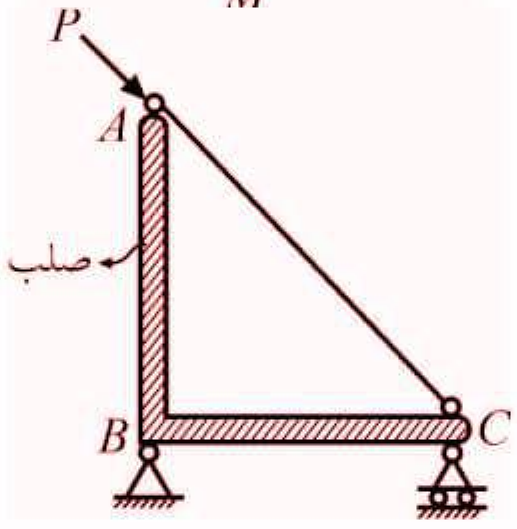
نیروی داخلی در یک عضو به دو علت زیر ایجاد می‌شود:

۱- در طول عضو بارگذاری به‌صورت مستقیم وارد شود.

(در طول عضو لنگر خمشی، نیروی برشی و نیروی محوری ایجاد می‌شود) ⇐

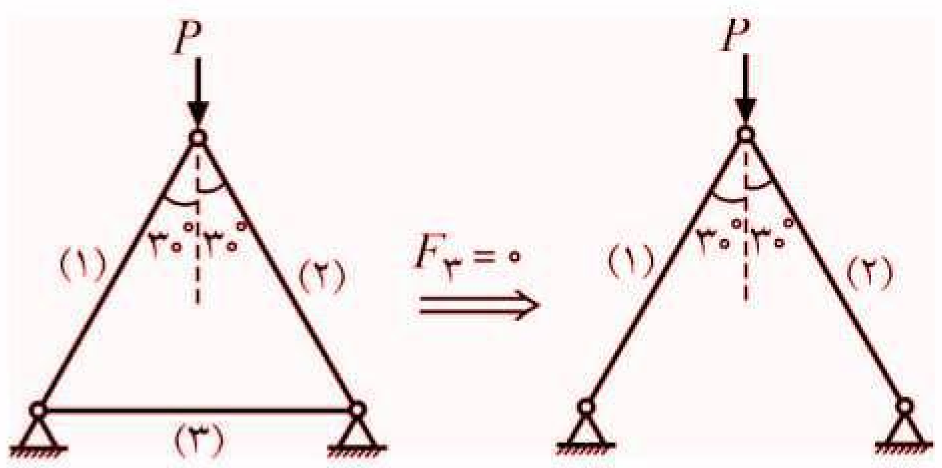


۲- در دو سر عضو به علت وجود سایر اعضاء سازه، تغییر مکان‌های نسبی به‌وجود آید. در سازهٔ زیر با توجه به جسم صلب، دو سر عضو AC نسبت به یکدیگر تغییر مکانی نداشته و بارگذاری نیز به‌صورت مستقیم بر عضو وارد نمی‌شود. بنابراین نیروی داخلی این عضو صفر است.



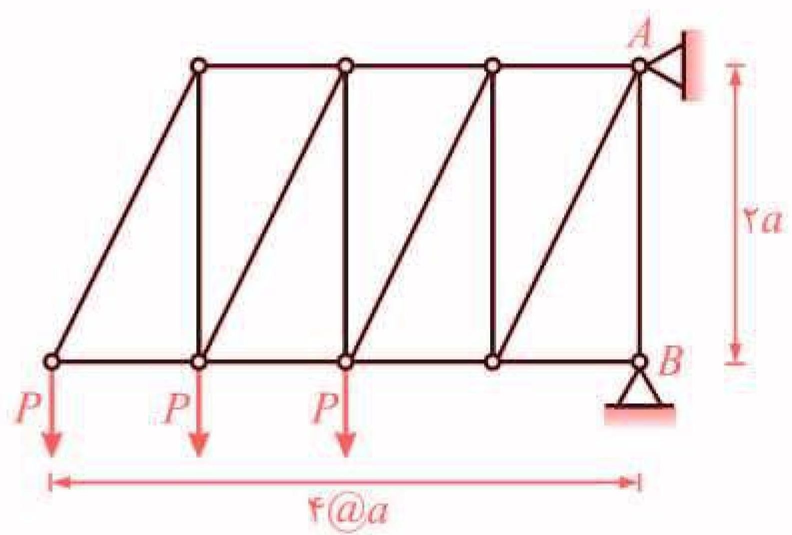
$$\Delta_{A,C}=0 \Rightarrow F_{AC}=0$$

به عنوان مثال دیگر، در شکل زیر سازه نامعین است. با دقت در سازه مشاهده می‌شود که بارگذاری مستقیم بر روی میلهٔ (۳) وجود نداشته و همچنین دو سر میله نیز نسبت به یکدیگر تغییر مکانی ندارند. بنابراین نیروی داخلی عضو (۳) صفر بوده و با حذف این میله، سازه به حالت معین تبدیل می‌شود.



$$\sum F_y=0 \Rightarrow F_1=F=\frac{P}{2\cos 30}=\frac{P}{\sqrt{3}}$$ (فشاری)

تمرین ۱۸: در خرپای مطابق شکل، مقدار عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه A کدام است؟ (دکتری - ۹۶)



۱) 3P

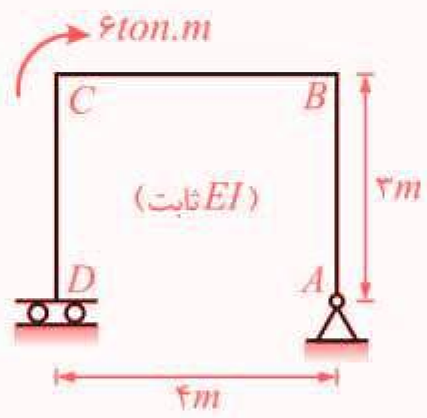
۲) 2/5P

۳) 2P

۴) 1/5P

سؤالات آزمون‌های ارشد و دکتری سراسری

۱- در سازهٔ شکل مقابل لنگر ton.m ۶ در نقطهٔ C وارد شده است، M_{BC} کدام است؟ (سراسری - ۹۵)



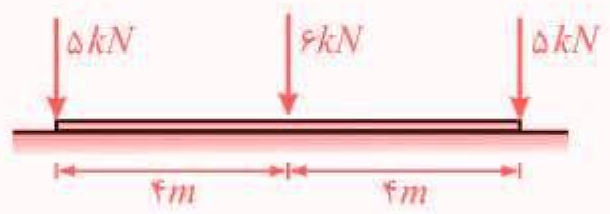
۱) صفر

۲) ton.m ۳ در جهت عقربه‌های ساعت

۳) ton.m ۳ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

۴) ton.m ۶ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت

۲- در تیر صلب زیر چنانچه مدول بستر زمین ثابت باشد، قدر مطلق حداکثر لنگر ایجاد شده در تیر چند کیلونیوتن - متر است؟ (دکتری - ۹۵)



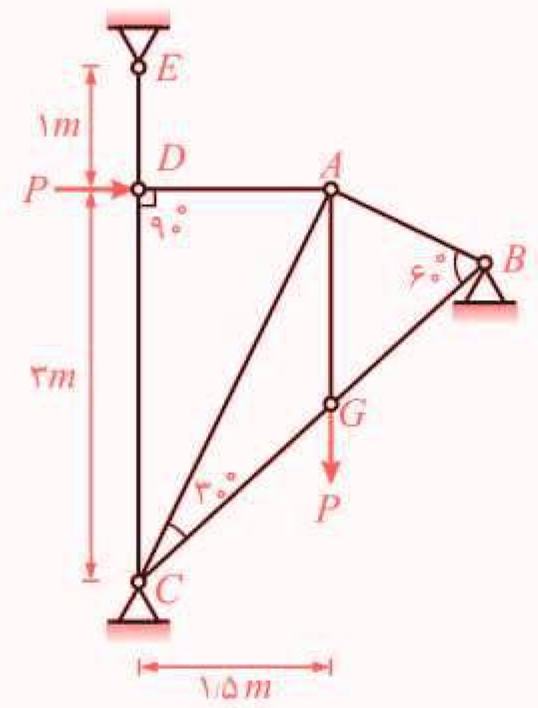
۱) ۱۰/۲۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۴

۴) ۲/۲۵

۳- در خرپای داده شده، EA برای تمامی اعضاء ثابت است. نیروی داخلی عضو AB چقدر است؟ (دکتری - ۹۴)



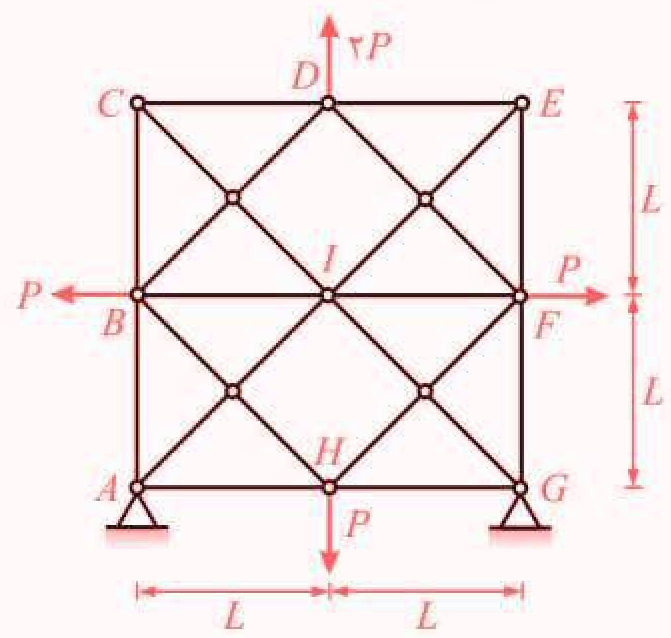
۱) $-\frac{P}{\sqrt{۱۱/۲۵}}$

۲) $-\frac{۱/۵P}{\sqrt{۱۱/۲۵}}$

۳) $-\frac{۳P}{\sqrt{۱۱/۲۵}}$

۴) $-\frac{۴/۵P}{\sqrt{۱۱/۲۵}}$

۴- در خرپای شکل زیر، اگر صلبیت محوری تمام اعضا EA باشد، نیروی میلهٔ BI کدام است؟ (دکتری- ۹۲)



۱) صفر

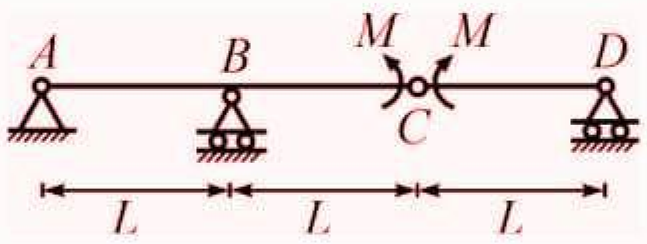
۲) P

۳) $\frac{P}{۲}$

۴) ۲P

سؤالات آزمون آزاد و تألیفی طبقه‌بندی شده

۳۳- در شکل مقابل، عکس‌العمل تکیه‌گاه B کدام است؟



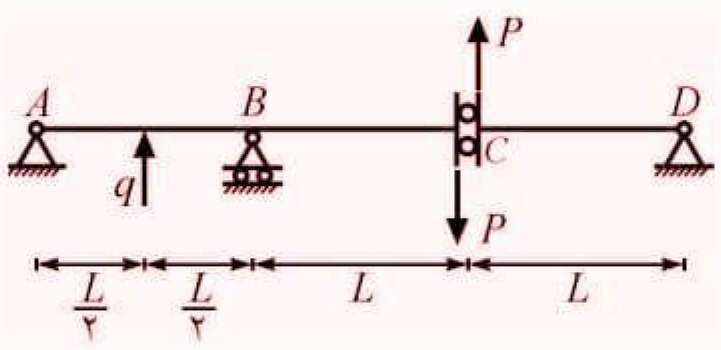
۱) $\frac{M}{L}$

۲) $\frac{2M}{L}$

۳) $\frac{3M}{L}$

۴) $\frac{4M}{L}$

۳۴- در تیر نشان داده‌شده بار q چقدر باشد تا عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه B صفر شود؟



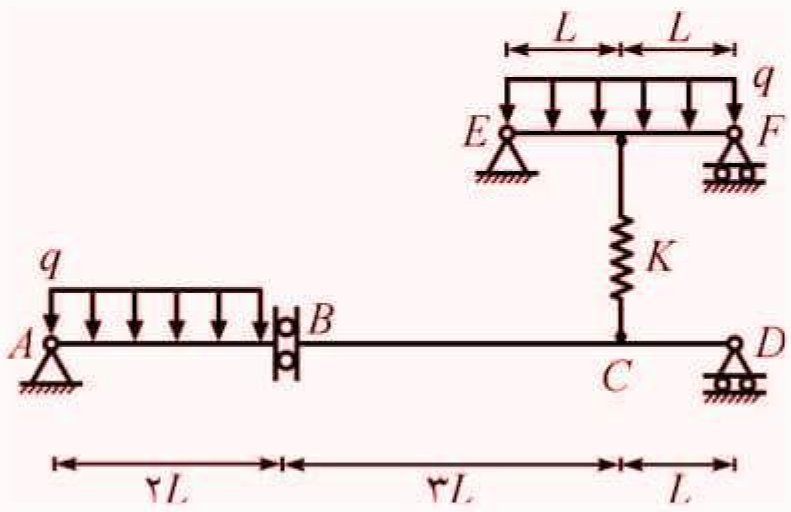
۱) ۲P

۲) ۳P

۳) ۴P

۴) ۶P

۳۵- در شکل زیر لنگر خمشی در محل مفصل برشی B کدام است؟



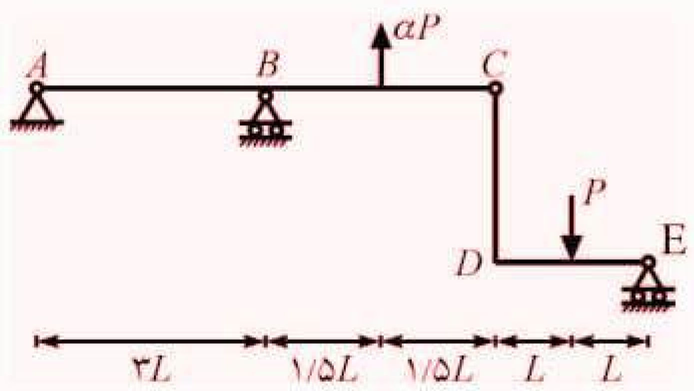
۱) $4qL^2$

۲) $2qL^2$

۳) qL^2

۴) $\frac{qL^2}{2}$

۳۶- در شکل مقابل α چقدر باشد تا در تکیه‌گاه A نیرویی ایجاد نشود؟ (نظام مهندسی ۸۴)



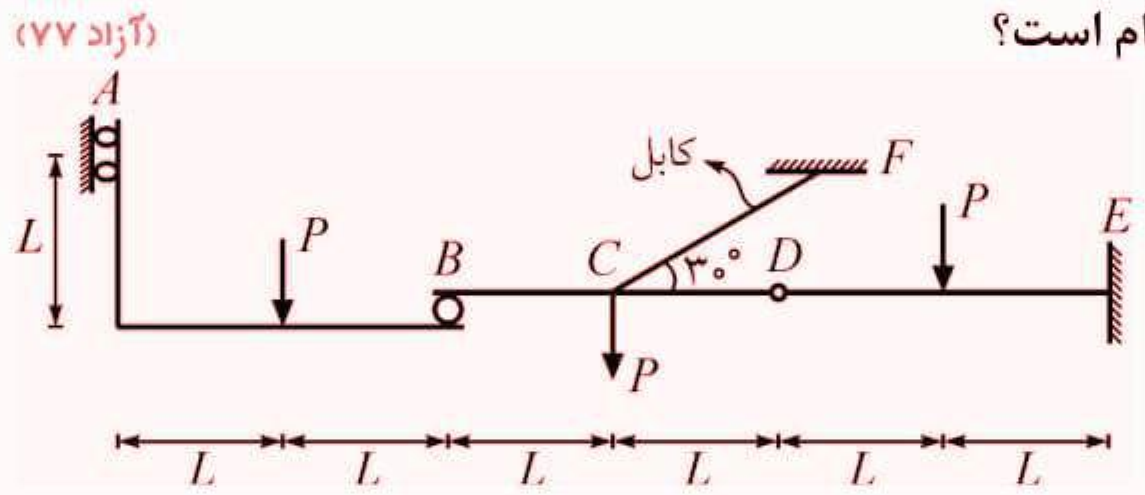
۱) ۱

۲) $\frac{4}{3}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) ۲

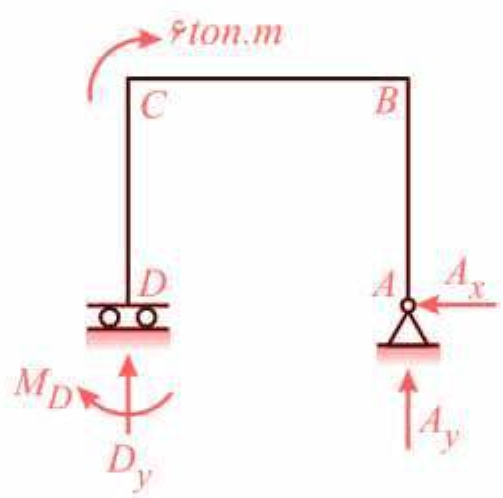
۳۷- در سازهٔ مقابل نیروی ایجاد شده در کابل کدام است؟ (آزاد ۷۷)



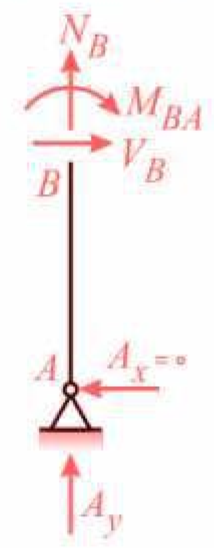
۱) P
۲) ۲P
۳) ۴P
۴) ۶P

۱- (۱) - (ساده)

اگر درجهٔ نامعینی سازه را محاسبه کنید مشاهده خواهید کرد که قاب موردنظر یک درجه نامعین است و ظاهراً نمی‌توان با استفاده از معادلات تعادل، نیروهای داخلی آن را به دست آورد. اما با اندکی دقت در سازه و با توجه به اینکه در اتصال B لنگر متمرکز وارد نشده است می‌توان گفت M_{BC} با M_{BA} برابر است. بنابراین می‌توانیم به جای محاسبهٔ M_{BC} مقدار M_{BA} را محاسبه کنیم. حتماً شما هم با ما موافق هستید که اگر عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A را به دست آوریم، لنگر خمشی M_{BA} به راحتی و با استفاده از تعادل عضو BA به دست خواهد آمد. بنابراین با بررسی تعادل کل قاب و در نهایت عضو BA داریم:



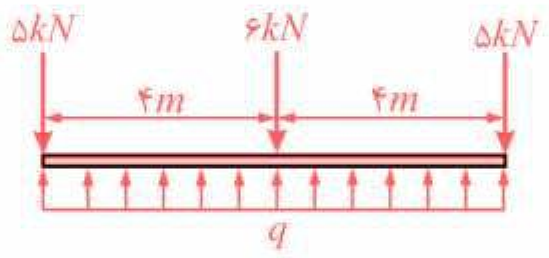
$$\sum F_x = \circ \Rightarrow A_x = \circ$$



$$\sum M_B = \circ \Rightarrow M_{BA} = \circ \Rightarrow M_{BC} = \circ$$

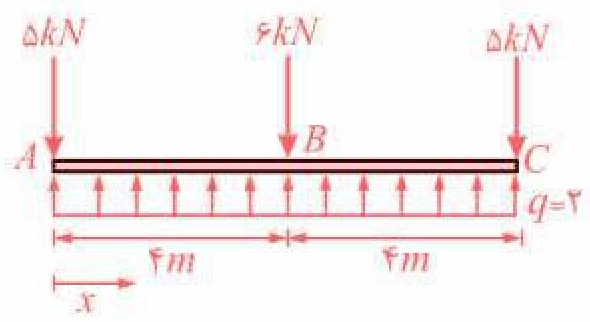
۲- (۲) - (متوسط)

ابتدا فرض می‌کنیم که عکس‌العمل بستر زمین به صورت بارگستردهٔ یکنواخت به شدت q به تیر وارد می‌شود. دراین صورت مقدار q برابر است با:



$$\sum F_y = \circ \Rightarrow ۸q - (۵ + ۶ + ۵) = \circ \Rightarrow q = ۲\ kN/m$$

در این حالت می‌توان فرض کرد که تیر ABC مطابق شکل زیر تحت بارهای نشان داده شده قرار داشته و می‌خواهیم لنگر خمشی حداکثر آن را به دست آوریم. در ادامه با فرض اینکه لنگر خمشی در فاصلهٔ x از یکی از بارهای ۵kN رخ می‌دهد، ابتدا تابع تغییرات لنگر خمشی را به دست می‌آوریم:



$$M(x) = \frac{qx^۲}{۲} - ۵x = x^۲ - ۵x \qquad (\circ \le x \le ۴)$$

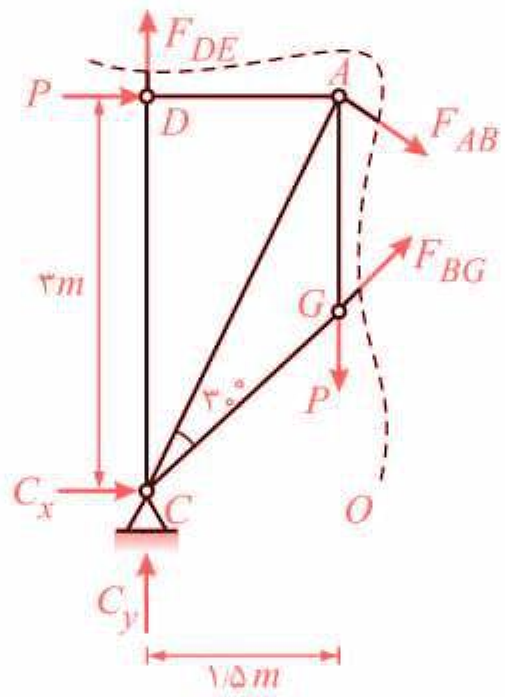
در ادامه از رابطهٔ M(x) مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dM(x)}{dx} = \circ \Rightarrow ۲x - ۵ = \circ \Rightarrow x = ۲/۵\ m \qquad \text{(محل لنگر ماکزیمم)}$$

در نهایت با قرار دادن مقدار x به دست آمده در رابطه داریم:

$$M(x = ۲/۵\ m) = ۲/۵^۲ - ۵ \times ۲/۵ = ۶/۲۵ - ۱۲/۵ = -۶/۲۵\ kN.m \Rightarrow |M_{max}| = ۶/۲۵\ kN.m$$

۳- (۳) - (متوسط)



ابتدا باید توجه کنید که تکیه‌گاه E به عضو خرپایی DE متصل شده و تنها یک عکس‌العمل در امتداد قائم خواهد داشت که از نقطهٔ C عبور می‌کند. از طرفی امتداد عضو BG نیز از نقطهٔ C عبور می‌کند. بنابراین با انتخاب مقطع شکل مقابل و با لنگرگیری حول نقطه همرسی C خواهیم داشت:

$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow P \times ۳ + P \times ۱/۵ + F_{AB} \times d = ۰$$

در این رابطه d فاصله عمودی نیروی عضو AB تا نقطهٔ C می‌باشد که با توجه به زوایای °۳۰ و °۶۰ در مثلث ABC می‌توان گفت عضو AC بر عضو AB عمود بوده و فاصلهٔ d برابر طول AC می‌باشد. این طول با توجه به رابطهٔ فیثاغورث در مثلث ACD برابر است با:

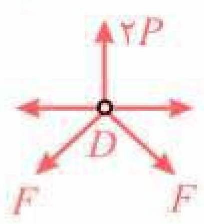
$$\text{در مثلث ACD}: d = AC = \sqrt{CD^۲ + AD^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۱/۵^۲} = \sqrt{۱۱/۲۵}$$

در نهایت خواهیم داشت:

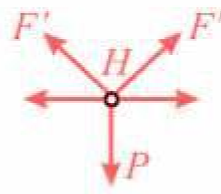
$$\sum M_C = ۰ \Rightarrow P \times ۳ + P \times ۱/۵ + F_{AB} \times \sqrt{۱۱/۲۵} = ۰ \Rightarrow F_{AB} = -\frac{۴/۵P}{\sqrt{۱۱/۲۵}}$$

۴- (۳) - (متوسط)

خرپا متقارن با بارگذاری متقارن است و نیروی اعضاء آن در دو طرف محورتقارن با هم یکسان است. بنابراین ابتدا تعادل مفصل‌های D و H را بررسی می‌کنیم.

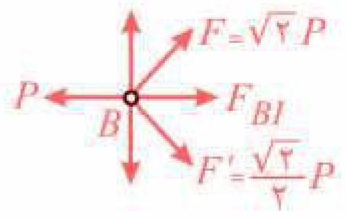


$$\text{مفصل D}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲P - ۲F\cos۴۵ = ۰ \Rightarrow F = \sqrt{۲}P$$



$$\text{مفصل H}: \sum F_y = ۰ \Rightarrow ۲F'\cos۴۵ - P = ۰ \Rightarrow F' = \frac{\sqrt{۲}}{۲}P$$

اکنون نیروهای به دست آمده را به مفصل B منتقل کرده و تعادل آن را بررسی خواهیم کرد.

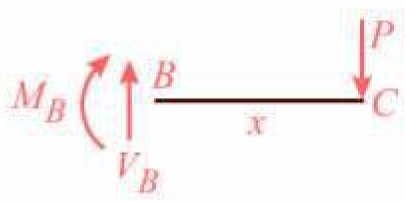


$$\text{مفصل B}: \sum F_x = ۰ \Rightarrow F\cos۴۵ + F'\cos۴۵ + F_{BI} - P = ۰$$

$$\Rightarrow F_{BI} = P - (\sqrt{۲}P) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - (\frac{\sqrt{۲}}{۲}P) \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = -\frac{P}{۲}$$

۵- (۱) - (دشوار)

لنگر خمشی منفی در قطعهٔ BC رخ داده و حداکثر آن برابر است با:

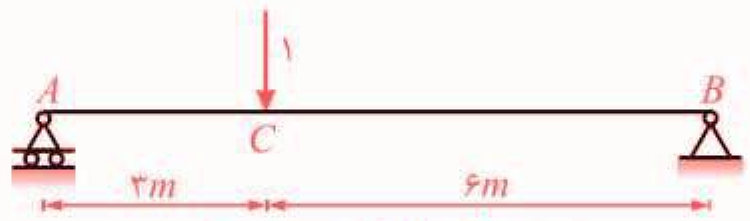


$$\sum M_B = ۰ \Rightarrow Px + M_B = ۰ \Rightarrow M_B = M^-_{max} = -Px$$

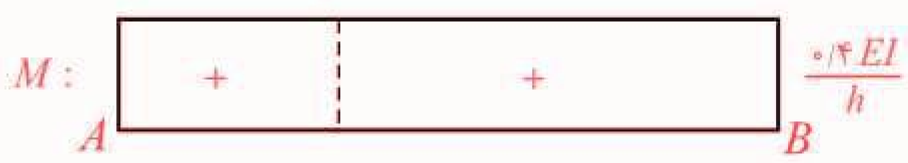
$$\Rightarrow |M^-_{max}| = Px$$

همچنین لنگر خمشی مثبت در فاصلهٔ نقطهٔ A تا نزدیکی نقطهٔ B رخ می‌دهد و برای حالت‌های خطی نمودار لنگر، مانند این تمرین، حداکثر لنگر در زیر بار متمرکز رخ می‌دهد. بنابراین برای محاسبهٔ آن ابتدا عکس‌العمل

برای ادامهٔ حل می‌توان فرض کرد که لنگر خمشی در طول تیر ثابت بوده و برابر $\frac{۰/۴EI}{h}$ می‌باشد. بنابراین بـرای استفاده از روش کار مجازی نمودار لنگر خمشی تیر تحت بارگذاری اصلی و مجازی به صورت زیر است:



تیر تحت بارگذاری مجازی



نمودار لنگر خمشی تیر تحت بارگذاری اصلی

نمودار لنگر خمشی تیر تحت بارگذاری مجازی

در نهایت با استفاده از رابطهٔ کار مجازی داریم:

$$۱\times\Delta_C=\int_A^B \frac{M(x)\,m(x)}{EI}dx=\overbrace{\frac{۲\times\frac{۰/۴EI}{h}\times۳}{۲EI}}^{\text{مثلث در مستطیل AC}}+\overbrace{\frac{۲\times\frac{۰/۴EI}{h}\times۶}{۲EI}}^{\text{مثلث در مستطیل BC}}=\frac{۳/۶}{h}$$

بنابراین گزینهٔ (۱) صحیح است.

چراجویی: در تمرین فوق دوران نقطهٔ C را بدست آورید.

راهنمایی: به جای بار واحد یک لنگر واحد در نقطهٔ C قرار دهید. (پاسخ : $\theta_C=\frac{۰/۶}{h}$)

۵-۱-۳- بررسی سایر حالت‌های بارگذاری در محاسبه تغییرشکل تیرها

فرض کنید در تیر مورد نظر برای تحلیل، بارگذاری به‌صورت‌های دیگر نظیـر تغییرشـکل‌هـای برشـی، پیچـشی، حرارت، نشست و ... نیز وجود داشته باشد. در این موارد و برای در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشـی و پیچـشی عبارت‌های زیر به سمت راست رابطه کار مجازی اضافه خواهد شد.

نیروی برشی : $\int\frac{V(x)\,v(x)}{GA_S}dx$

لنگر پیچشی : $\int\frac{T(x)\,t(x)}{GJ}dx$

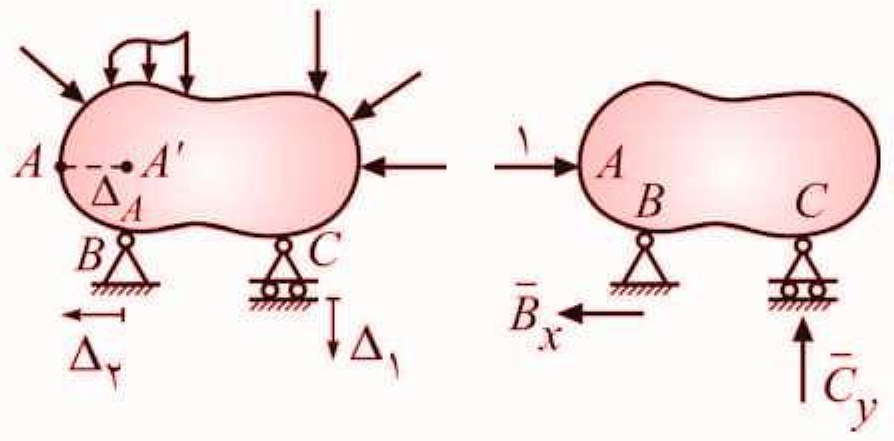
در رابطه کار مجازی مربوط به نیروی برشی، A_s سطح مقطع مؤثر برش می‌باشد که بـرای مقـاطع مـستطیلی و دایروی به شرح زیر است:

مقطع	مساحت	سطح مؤثر برشی (A_S)
مستطیل	A	$\frac{۵}{۶}A$
دایره	A	$\frac{۹}{۱۰}A$

در رابطه کار مجازی مربوط به لنگر پیچشی، J ممان اینرسی قطبی و در هر دو رابطه G مدول برشی ماده می‌باشد. در ادامه به چند نکته توجه کند.

بررسی چند نکته مهم:

۱- اگر در سازهٔ اصلی علاوه بر نیروهای خارجی، تکیه‌گاه‌ها نیز نشست داشته باشند، کار انجام شده توسط عکس‌العمل تکیه‌گاهی نظیر این نشست در سازهٔ مجازی، به سمت چپ تساوی اضافه می‌شود. به‌طور مثال در سازهٔ زیر تغییر مکان افقی نقطهٔ A تحت اثرات خمش و نشست تکیه‌گاه‌ها عبارت است از:

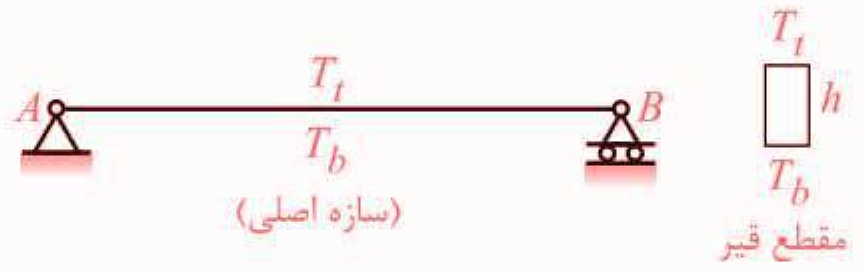


$$۱\times \Delta_A + \bar{B}_x \times \Delta_۲ - \bar{C}_y \times \Delta_۱ = \int \frac{M(x)m(x)}{EI}dx$$

دقت شود که $\bar{B}_x$ با $\Delta_۲$ هم‌جهت بوده و کار آن مثبت می‌باشد و $\bar{C}_y$ با $\Delta_۱$ در خلاف جهت بوده و کار آن با علامت منفی در سمت چپ تساوی وارد می‌شود.

۲- اگر دمای یک عضو به اندازهٔ ΔT افزایش یا کاهش یابد، عبارت $\int n\alpha \Delta T dx$ به تغییر مکان‌های نقطهٔ A در سمت راست تساوی اضافه می‌شود. در این عبارت افزایش دما با علامت مثبت و کاهش دما با علامت منفی در نظر گرفته شده و n نیروی محوری عضوی در سازهٔ مجازی است که دمای آن تغییر کرده.

۳- اگر بین پایین و بالای مقطع عضوی از سازه اختلاف دمای ΔT^* ایجاد شود، این تغییر دما باعث ایجاد دوران در مقطع و ایجاد تغییر مکان در نقاط مختلف سازه می‌شود. اثر این تغییر دما با عبارت زیر در سمت راست تساوی وارد می‌شود:



$$\int m\alpha \frac{\Delta T^*}{h} dx$$

α: ضریب انبساط حرارتی

h: ارتفاع مقطع

ΔT^*: اختلاف دمای بین پایین و بالای مقطع ($T_b - T_t$)

۴- حالتی را در نظر بگیرید که در آن دمای اولیهٔ مقطع برابر $T_۰$ بوده و با افزایش یا کاهش دمای محیط، دمای پایین مقطع T_b و دمای بالای مقطع به‌صورت خطی به T_t رسیده باشد. در اثر این تغییر دما، دو عامل باعث تغییر مکان نقطهٔ موردنظر در سازه می‌شود:

الف) اختلاف دمای $T_b - T_t$ باعث دوران مقطع شده و گرادیان حرارتی ΔT^* را ایجاد می‌کند.

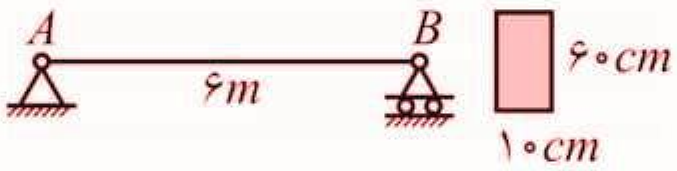
ب) تغییر دمای تار خنثی نسبت به حالت اولیه، باعث انبساط طولی در سازه می‌شود.

بنابراین دو عبارت زیر به سمت راست تساوی در رابطهٔ کار مجازی اضافه می‌شود:

$$\int m\,\alpha\frac{(T_b-T_t)}{h}\,dx+\int m\alpha\,(T_{N.L}-T_{\circ})\,dx$$

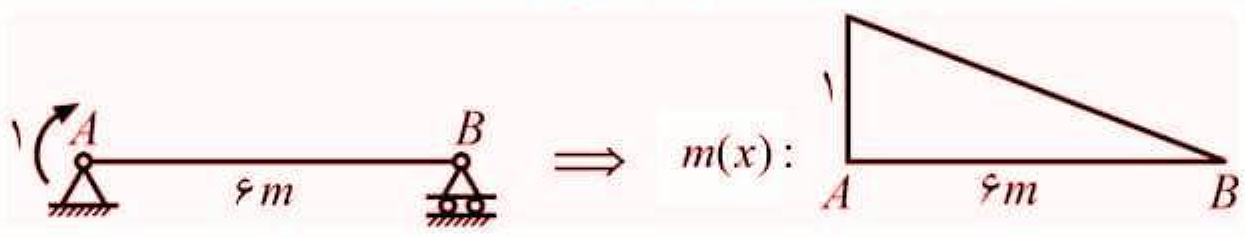
برای درک بهتر موارد فوق به تمرینات زیر توجه نمائید.

تمرین ۸: در شکل مقابل، دمای تار پایینی به اندازهٔ ۳۰ درجهٔ سانتی‌گراد از تار بالایی بیشتر است. شیب نقطه A کدام است؟ $(\alpha=۱\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{K})$



۱) ۱۰×۱۰^{-۴} Rad
۲) ۱۵×۱۰^{-۴} Rad
۳) ۳۰×۱۰^{-۴} Rad
۴) ۳۰×۱۰^{-۳} Rad

حل: با اعمال لنگر واحد در A و با استفاده از نکات اشاره شده در روش کار مجازی داریم:



$$۱\times\theta=\int m\alpha\frac{\Delta T^*}{h}dx \quad \text{و} \quad \alpha=۱\times۱۰^{-۵}\,,\,h=۶۰\,cm \quad \text{و} \quad \Delta T=T_b-T_t=۳۰$$

$$\theta_A=\alpha\frac{\Delta T^*}{h}\int_A^B m\,dx \quad \text{و} \quad \int_A^B m\,dx=$$ مساحت زیر نمودار لنگر خمشی

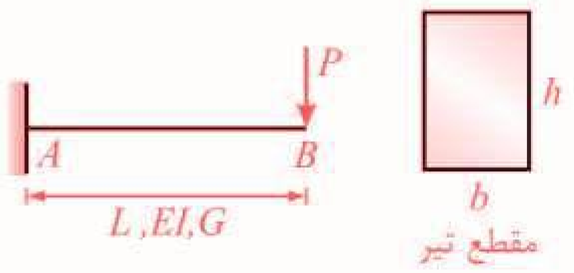
$$\int_A^B m\,dx=\frac{۱\times۶}{۲}=۳\ \Rightarrow\ \theta_A=۱\times۱۰^{-۵}\times\frac{۳۰}{۰/۶}\times۳=۱۵\times۱۰^{-۴}\ \text{Rad}$$

بنابراین، گزینهٔ (۲) صحیح است.

چراجویی: در تمرین فوق تغییرمکان وسط تیر چقدر است؟

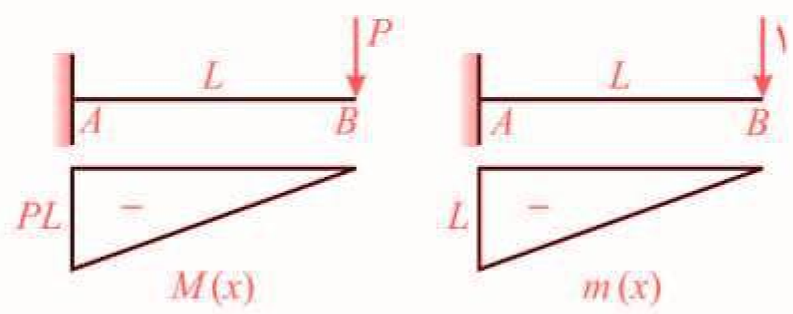
راهنمایی: در سازه تحت بارگذاری مجازی بار واحد قائم را در مرکز تیر قرار دهید. (پاسخ: $\Delta=۲/۲۵$ mm)

تمرین ۹: تغییر مکان قائم نقطهٔ B با در نظر گرفتن انرژی برشی و خمشی نسبت به حالتی که فقط انرژی خمشی در نظر گرفته شود، چند درصد افزایش می‌یابد؟ (فرض کنید $\frac{E}{G}=۲/۴$ و $\frac{L}{h}=۱۰$ است) (سراسری - ۸۹)



۱) ٪۱/۷۲
۲) ٪۱/۰۰۷۲
۳) ٪۱/۰۷۲
۴) ٪۰/۷۲

ابتدا تغییر مکان نقطهٔ B، فقط در اثر خمش را بدست می‌آوریم. بدین منظور با قرار دادن یک بار واحد در نقطهٔ B و رسم نمودار لنگر خمشی داریم:



$$\Delta_{B_۱}=\int_{\circ}^{L}\frac{M(x)m(x)}{EI}dx$$

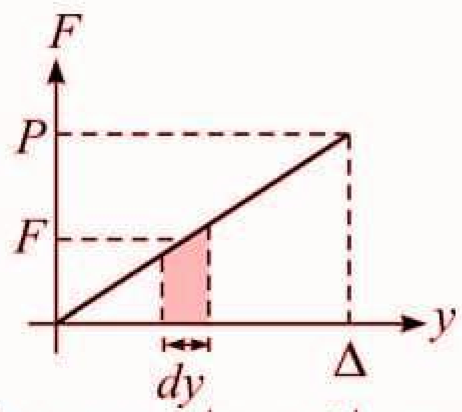
$$\Delta_{B_۱}=\frac{PL\times L\times L}{۳EI}=\frac{PL^۳}{۳EI}$$

مقدمه

در این فصل سه موضوع پرکاربرد از مباحث انرژی در سازه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. به‌طور کلی روش‌های انرژی از روش‌های کلاسیک و قدرتمند تحلیل‌سازه می‌باشند. در ابتدا با نحوهٔ محاسبهٔ انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه تحت بارگذاری‌های مختلف آشنا خواهید شد. در ادامه قضیه کاستلیانو را به‌عنوان یکی از قضایای مهم تحلیل‌سازه مورد بررسی قرار می‌دهیم و به تشریح کامل مسائل آن می‌پردازیم و در نهایت قضیه بتی ماکسول را به‌عنوان یک قضیه کمکی برای محاسبه تغییرشکل در سازه‌ها خواهیم آموخت. به‌طور کلی سازه‌های مورد بررسی در این فصل و تحلیل‌سازه بیشتر تحت لنگرهای خمشی تحلیل خواهند شد. هر چند روابط مورد نیاز برای تحلیل ناشی از سایر نیروهای داخلی نیز بیان شده است.

۶-۱- محاسبه کار در روش‌های انرژی

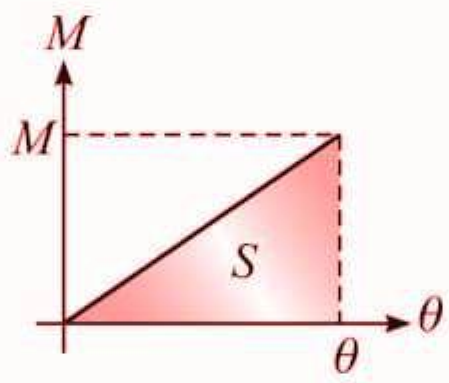
در شکل زیر نیروی F را به‌تدریج از مقدار اولیهٔ صفر به P رسانده و در این جابه‌جایی تغییر مکان قائم نقطهٔ A از صفر به Δ رسیده است. کار کل انجام شده توسط بار F، با فرض رابطهٔ خطی بین نیرو و جابه‌جایی در طول مدت بارگذاری عبارت است از:



$$\begin{cases} dW = F\cdot dy \\ F = \dfrac{P}{\Delta}\,y \end{cases} \Rightarrow \boxed{W = \int_{0}^{\Delta} dW = \int_{0}^{\Delta} \frac{P}{\Delta}\,y\,dy = \frac{1}{2}P\Delta}$$

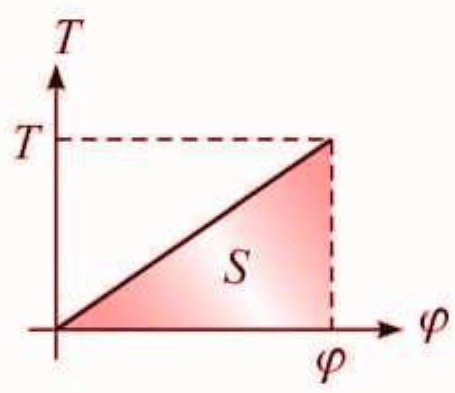
لذا مقدار کار محاسبه شده، معادل مساحت زیر نمودار نیرو- جابه‌جایی از صفر تا Δ می‌باشد. با توجه به این مفهوم می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- اگر گشتاور خمشی M به تدریج بر نقطه‌ای از یک سازه اثر کرده و شیب آن نقطه را از صفر به θ برساند، کار انجام شده توسط لنگر خمشی در طی زمان بارگذاری عبارت است از:



$$\boxed{W = S = \frac{1}{2}M\theta}$$

۲- اگر گشتاور پیچشی T به تدریج بر انتهای یک میله اثر کرده و زاویهٔ پیچش انتهای آن را از صفر به φ برساند، کار انجام شده توسط لنگر پیچشی در طی زمان بارگذاری عبارت است از:



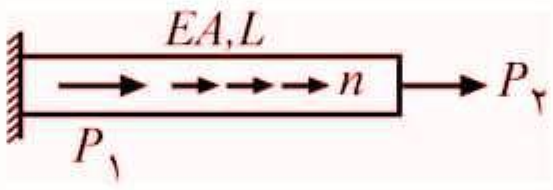
$$\boxed{W = S = \frac{1}{2}T\varphi}$$

۶-۲- محاسبه انرژی کرنشی ذخیره شده در یک سازه

در اثر انواع نیروهای خارجی وارد بر سازه و در نتیجه ایجاد تغییرشکل‌های مختلف در نقاط آن شامل تغییرمکان و دوران می‌توان گفت یک نیروی داخلی و در نتیجه تنش‌های داخلی در اعضا ایجاد خواهد شد و به‌عبارت دیگر هر یک از اعضا مقداری کار انجام خواهند داد که تحت عنوان انرژی کرنشی بررسی خواهد شد و در ادامه به نحوه محاسبهٔ انواع آن خواهیم پرداخت. برای محاسبهٔ انرژی کرنشی، می‌توان اثر هر یک از مولفه‌های نیروی داخلی را به‌صورت جداگانه بررسی نموده و با جمع آنها، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه را به‌دست آورد. در ادامه به بررسی کار نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و لنگر پیچشی در اعضا می‌پردازیم:

۶-۲-۱- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر نیروی محوری داخلی

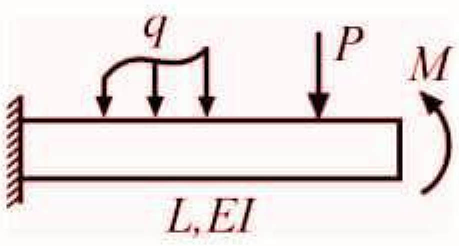
فرض کنید نیروی محوری در طول عضوی از سازه برابر $N(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:



$$U=\int_۰^L \frac{N^۲(x)}{۲EA}dx$$

۶-۲-۲- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر لنگر خمشی داخلی

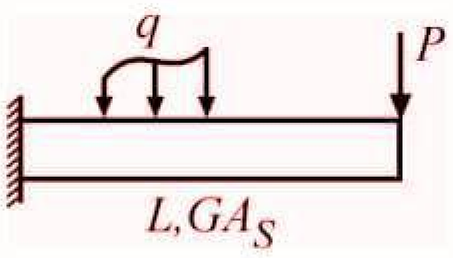
فرض کنید لنگر خمشی داخلی در طول عضوی از سازه برابر $M(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:



$$U=\int_۰^L \frac{M^۲(x)}{۲EI}dx$$

۶-۲-۳- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر نیروی برشی داخلی

فرض کنید نیروی برشی در طول عضوی از سازه برابر $V(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:

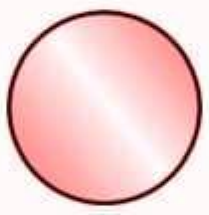


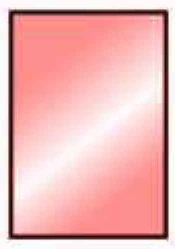
$$U=\int_۰^L \frac{V^۲(x)}{۲GA_S}dx$$

تذکر: می‌دانیم که توزیع تنش برشی در یک مقطع معمولاً یکنواخت نمی‌باشد. A_S، سطح مقطع خالص برشی نام داشته و برابر مساحتی است که اگر توزیع تنش‌های برشی در آن به‌صورت یکنواخت در نظر گرفته شود، تغییر شکل‌های برشی سازه با مقطع A_S، با تغییر شکل‌های برشی سازه با مقطع اصلی یکسان شود. A_S معمولاً به‌صورت ضریبی از مساحت مقطع بیان می‌شود:

$A_S=KA$ (K: ضریب شکل مقطع)

ضریب شکل مقطع، برای دایره و مستطیل عبارت است از:

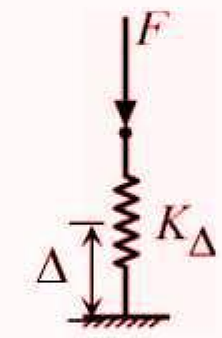
: دایره  $A_S = \frac{9}{10} A$ $K = \frac{9}{10}$

: مستطیل  $A_S = \frac{5}{6} A$ $K = \frac{5}{6}$

۶-۲-۴- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر لنگر پیچشی داخلی

فرض کنید لنگر پیچشی داخلی در طول میلهٔ زیر برابر $T(x)$ باشد، ثابت می‌شودکه انرژی کرنشی ذخیـره شـده در سازه، در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:

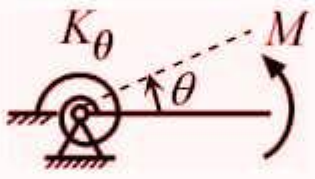
$$U = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2GJ} dx$$



نکته ۱: اگر در یک سازه فنر داخلی موجـود بـوده و نیـروی F در آن ایجـاد شود، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه ناشی از فنر انتقالی عبارت است از:

$$U = \frac{F^2}{2K_\Delta} \quad \text{یا} \quad U = \frac{1}{2} K_\Delta \times \Delta^2$$

همچنین اگر لنگر خمشی M در فنر دورانی ایجادشود، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه ناشی از آن عبارت است از:



$$U = \frac{M^2}{2K_\theta} \quad \text{یا} \quad u = \frac{1}{2} k_\theta \times \theta^2$$

جمع‌بندی

رابطهٔ عمومی محاسبه انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه‌ها، به شکل زیر است:

$$U = \underbrace{\int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA_s} dx}_{(2)} + \underbrace{\int_0^L \frac{N^2(x)}{2EA} dx}_{(3)} + \underbrace{\int_0^L \frac{T^2(x)}{2GJ} dx}_{(4)} + \underbrace{\sum \frac{F_s^2}{2K_\Delta}}_{(5)} + \underbrace{\sum \frac{M_s}{2K_\theta}}_{(6)}$$

در رابطهٔ عمومی فوق

U انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه، عبارت (۱) انرژی کرنشی سازه تحت اثر لنگر خمشی داخلـی، عبـارت (۲) انرژی کرنشی سازه تحت اثر نیروی برشی داخلی، عبـارت (۳) انـرژی کرنـشی سـازه (تحـت اثـر نیـروی محوری داخلی، عبارت (۴) انرژی کرنشی تحت اثر لنگر پیچـشی داخلـی، عبـارت (۵) انـرژی کرنـشی سـازه ذخیره شده در فنرهای انتقالی سازه و عبارت (۶) انرژی کرنشی ذخیره شده در فنرهای دورانی سازه می‌باشد.

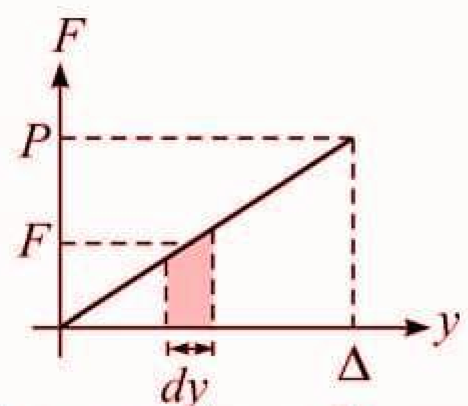
برای محاسبهٔ انرژی کرنشی در یک سازه با استفاده از رابطهٔ عمومی انرژی، ابتـدا معادلـهٔ تغییـرات نیروهـای داخلی در اعضاء سازه را به‌دست آورده و سپس با استفاده از انتگرال‌های فوق، مقـدار انـرژی کرنـشی ذخیـره شده در سازه را محاسبه می‌کنیم.

مقدمه

در این فصل سه موضوع پرکاربرد از مباحث انرژی در سازه مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است. به‌طور کلی روش‌های انرژی از روش‌های کلاسیک و قدرتمند تحلیل‌سازه می‌باشند. در ابتدا با نحوهٔ محاسبهٔ انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه تحت بارگذاری‌های مختلف آشنا خواهید شد. در ادامه قضیه کاستلیانو را به‌عنوان یکی از قضایای مهم تحلیل‌سازه مورد بررسی قرار می‌دهیم و به تشریح کامل مسائل آن می‌پردازیم و در نهایت قضیه بتی ماکسول را به‌عنوان یک قضیه کمکی برای محاسبه تغییرشکل در سازه‌ها خواهیم آموخت. به‌طور کلی سازه‌های مورد بررسی در این فصل و تحلیل‌سازه بیشتر تحت لنگرهای خمشی تحلیل خواهند شد. هر چند روابط مورد نیاز برای تحلیل ناشی از سایر نیروهای داخلی نیز بیان شده است.

۶-۱- محاسبه کار در روش‌های انرژی

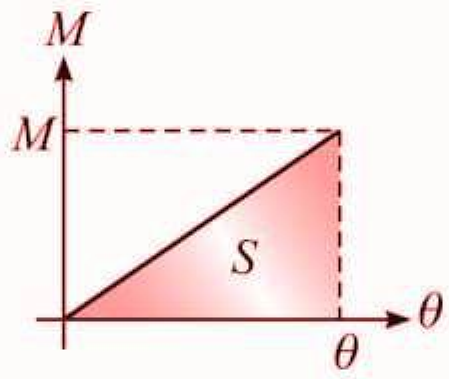
در شکل زیر نیروی F را به‌تدریج از مقدار اولیهٔ صفر به P رسانده و در این جابه‌جایی تغییر مکان قائم نقطهٔ A از صفر به Δ رسیده است. کار کل انجام شده توسط بار F، با فرض رابطهٔ خطی بین نیرو و جابه‌جایی در طول مدت بارگذاری عبارت است از:



$$\begin{cases} dW = F \cdot dy \\ F = \dfrac{P}{\Delta}\, y \end{cases} \Rightarrow \boxed{W = \int_0^{\Delta} dW = \int_0^{\Delta} \frac{P}{\Delta}\, y\, dy = \frac{1}{2} P \Delta}$$

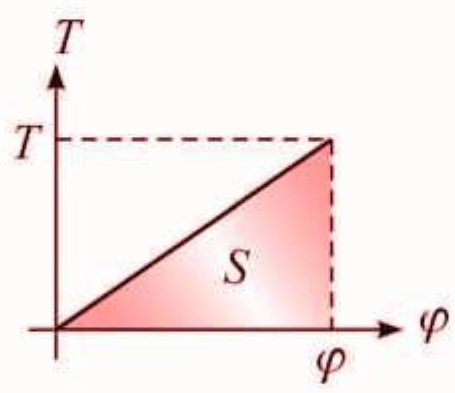
لذا مقدار کار محاسبه شده، معادل مساحت زیر نمودار نیرو- جابه‌جایی از صفر تا Δ می‌باشد. با توجه به این مفهوم می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- اگر گشتاور خمشی M به تدریج بر نقطه‌ای از یک سازه اثر کرده و شیب آن نقطه را از صفر به θ برساند، کار انجام شده توسط لنگر خمشی در طی زمان بارگذاری عبارت است از:



$$\boxed{W = S = \frac{1}{2} M\theta}$$

۲- اگر گشتاور پیچشی T به تدریج بر انتهای یک میله اثر کرده و زاویهٔ پیچش انتهای آن را از صفر به φ برساند، کار انجام شده توسط لنگر پیچشی در طی زمان بارگذاری عبارت است از:



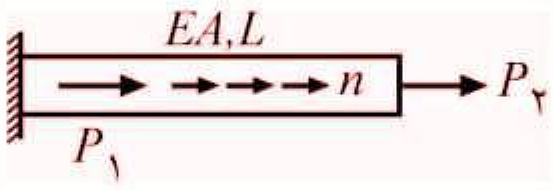
$$\boxed{W = S = \frac{1}{2} T\varphi}$$

۶-۲- محاسبه انرژی کرنشی ذخیره شده در یک سازه

در اثر انواع نیروهای خارجی وارد بر سازه و در نتیجه ایجاد تغییرشکل‌های مختلف در نقاط آن شامل تغییرمکان و دوران می‌توان گفت یک نیروی داخلی و در نتیجه تنش‌های داخلی در اعضا ایجاد خواهد شد و به‌عبارت دیگر هر یک از اعضا مقداری کار انجام خواهند داد که تحت عنوان انرژی کرنشی بررسی خواهد شد و در ادامه به نحوه محاسبهٔ انواع آن خواهیم پرداخت. برای محاسبهٔ انرژی کرنشی، می‌توان اثر هر یک از مولفه‌های نیروی داخلی را به‌صورت جداگانه بررسی نموده و با جمع آنها، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه را به‌دست آورد. در ادامه به بررسی کار نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و لنگر پیچشی در اعضا می‌پردازیم:

۶-۲-۱- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر نیروی محوری داخلی

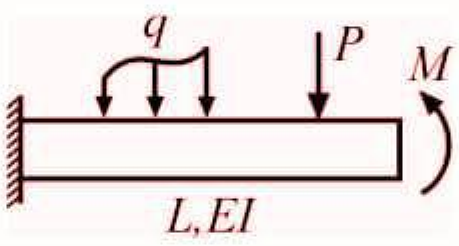
فرض کنید نیروی محوری در طول عضوی از سازه برابر $N(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:



$$U = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2EA}\,dx$$

۶-۲-۲- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر لنگر خمشی داخلی

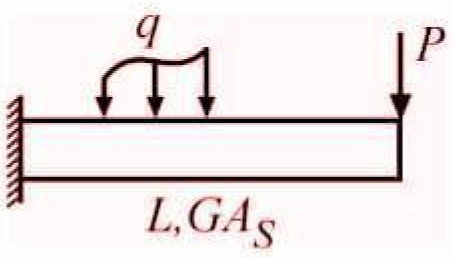
فرض کنید لنگر خمشی داخلی در طول عضوی از سازه برابر $M(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:



$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}\,dx$$

۶-۲-۳- کارمایهٔ کرنشی تحت اثر نیروی برشی داخلی

فرض کنید نیروی برشی در طول عضوی از سازه برابر $V(x)$ باشد، ثابت می‌شود که انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:

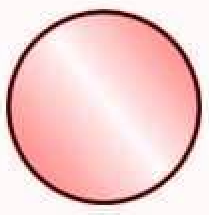


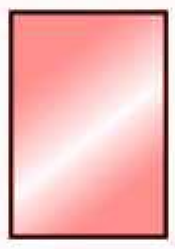
$$U = \int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA_S}\,dx$$

تذکر: می‌دانیم که توزیع تنش برشی در یک مقطع معمولاً یکنواخت نمی‌باشد. A_S، سطح مقطع خالص برشی نام داشته و برابر مساحتی است که اگر توزیع تنش‌های برشی در آن به‌صورت یکنواخت در نظر گرفته شود، تغییر شکل‌های برشی سازه با مقطع A_S، با تغییر شکل‌های برشی سازه با مقطع اصلی یکسان شود. A_S معمولاً به‌صورت ضریبی از مساحت مقطع بیان می‌شود:

$A_S = KA$ (K: ضریب شکل مقطع)

ضریب شکل مقطع، برای دایره و مستطیل عبارت است از:

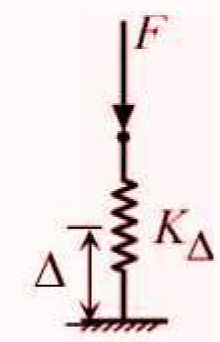
: دایره  $A_S = \frac{۹}{۱۰}A$ $K = \frac{۹}{۱۰}$

: مستطیل  $A_S = \frac{۵}{۶}A$ $K = \frac{۵}{۶}$

۶-۲-۴- کارمایه کرنشی تحت اثر لنگر پیچشی داخلی

فرض کنید لنگر پیچشی داخلی در طول میلهٔ زیر برابر $T(x)$ باشد، ثابت می‌شودکه انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه، در اثر این نیروی داخلی عبارت است از:

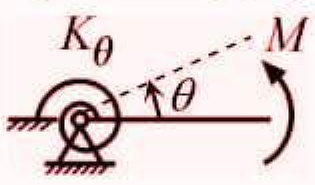
$$\boxed{U = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2GJ}dx}$$



نکته ۱: اگر در یک سازه فنر داخلی موجود بوده و نیروی F در آن ایجاد شود، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه ناشی از فنر انتقالی عبارت است از:

$$\boxed{U = \frac{F^2}{2K_\Delta}} \quad \text{یا} \quad \boxed{U = \frac{1}{2}K_\Delta \times \Delta^2}$$

همچنین اگر لنگر خمشی M در فنر دورانی ایجادشود، انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه ناشی از آن عبارت است از:



$$\boxed{U = \frac{M^2}{2K_\theta}} \quad \text{یا} \quad \boxed{u = \frac{1}{2}k_\theta \times \theta^2}$$

جمع‌بندی

رابطهٔ عمومی محاسبه انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه‌ها، به شکل زیر است:

$$\boxed{U = \underbrace{\int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI}dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA_s}dx}_{(2)} + \underbrace{\int_0^L \frac{N^2(x)}{2EA}dx}_{(3)} + \underbrace{\int_0^L \frac{T^2(x)}{2GJ}dx}_{(4)} + \underbrace{\sum \frac{F_s^2}{2K_\Delta}}_{(5)} + \underbrace{\sum \frac{M_s}{2K_\theta}}_{(6)}}$$

در رابطهٔ عمومی فوق

U انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه، عبارت (۱) انرژی کرنشی سازه تحت اثر لنگر خمشی داخلی، عبارت (۲) انرژی کرنشی سازه تحت اثر نیروی برشی داخلی، عبارت (۳) انرژی کرنشی سازه (تحت اثر نیروی محوری داخلی، عبارت (۴) انرژی کرنشی تحت اثر لنگر پیچشی داخلی، عبارت (۵) انرژی کرنشی سازه ذخیره شده در فنرهای انتقالی سازه و عبارت (۶) انرژی کرنشی ذخیره شده در فنرهای دورانی سازه می‌باشد.

برای محاسبهٔ انرژی کرنشی در یک سازه با استفاده از رابطهٔ عمومی انرژی، ابتدا معادلهٔ تغییرات نیروهای داخلی در اعضاء سازه را به‌دست آورده و سپس با استفاده از انتگرال‌های فوق، مقدار انرژی کرنشی ذخیره شده در سازه را محاسبه می‌کنیم.

۹-۲-۱- فرضیات روش شیب افت

۱- در این کتاب برای روش شیب افت تنها تغییر شکل‌های خمشی در عضو مدنظر قرار گرفته و از تغییر شکل‌های برشی و محوری صرفنظر می‌شود. دقت شود که صرف‌نظر کردن از تغییر شکل‌های محوری، به معنای نادیده گرفتن نیروی محوری عضو نمی‌باشد. این موضوع، به معنای بی‌نهایت در نظر گرفتن سختی محوری اعضاء می‌باشد.

$$\frac{EA}{L} \to \infty \;\Rightarrow\; \Delta = \frac{P}{\frac{EA}{L}} \to ۰$$

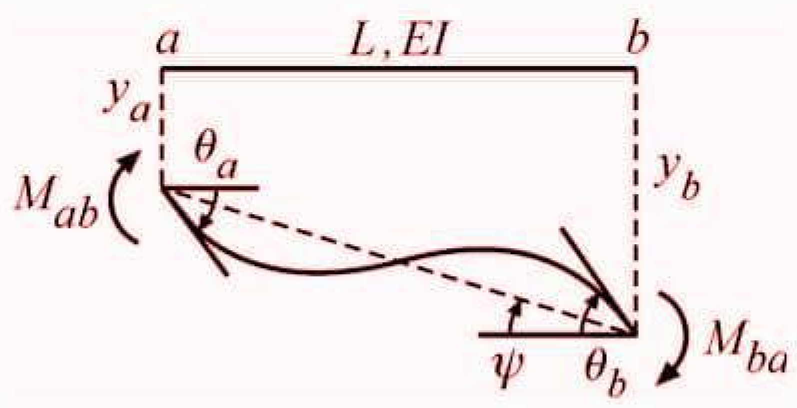
۲- تعداد مجهولات این روش، برابر مجموع درجات آزادی انتقالی و دورانی در سازه می‌باشد. در سؤالات کنکور معمولاً سازه‌های دارای درجهٔ آزادی انتقالی مطرح نشده و در صورت مطرح شدن، حل آن با استفاده از روش‌های نرمی یا فنر توصیه می‌شود.

۳- برای حل سازه، باید به تعداد مجهولات، معادلهٔ تعادل در اعضای سازه بررسی شود. بررسی تعادل دورانی در گره‌ها ($\sum M = ۰$)، از معادلات تعادل مناسب برای به دست آوردن مجهولات دورانی (درجهٔ آزادی دورانی) در انواع سازه‌ها محسوب می‌شود.

۴- در شکل زیر، جهت‌های مثبت قراردادی این روش برای نیروی برشی و لنگر خمشی در اعضاء نشان داده شده است:

لنگر خمشی و نیروی برشی مثبت، باعث دوران عضو در جهت ساعتگرد می‌شود.

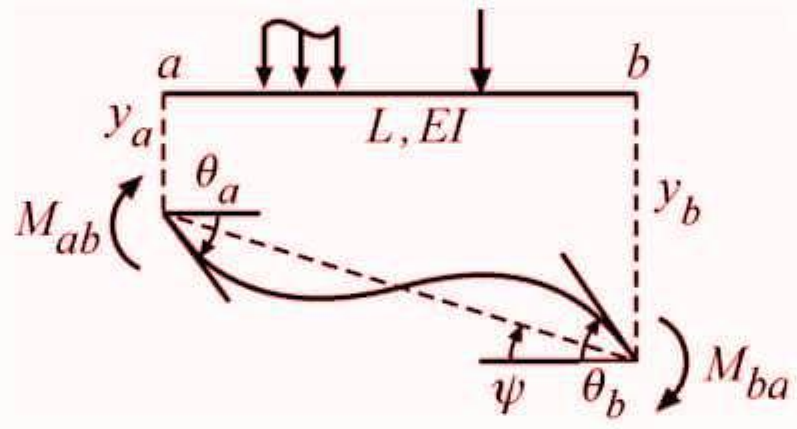
۵- دوران گره‌ها (θ_a ،θ_b) و دوران محور عضو (ψ) در جهت ساعتگرد مثبت و در جهت پادساعتگرد منفی فرض می‌شود. این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است:



$$\text{چرخش محور عضو} = \psi = \frac{y_b - y_a}{L}$$

۹-۲-۲- روابط شیب افت

در شکل زیر دوران در دو سر عضو برابر θ_a و θ_b بوده و دوران محور عضو برابر ψ است. در این صورت لنگرهای M_{ab} و M_{ba} عبارت است از:



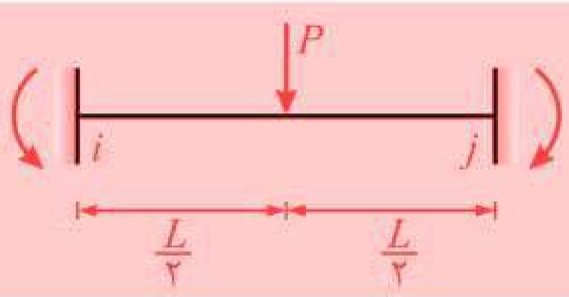
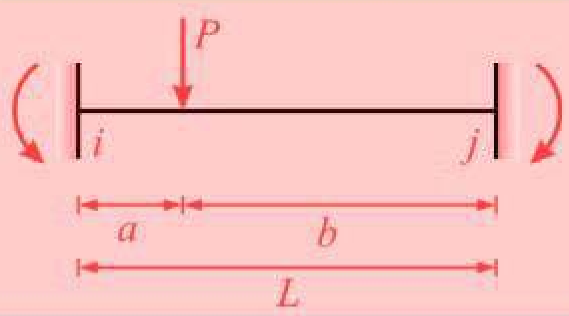
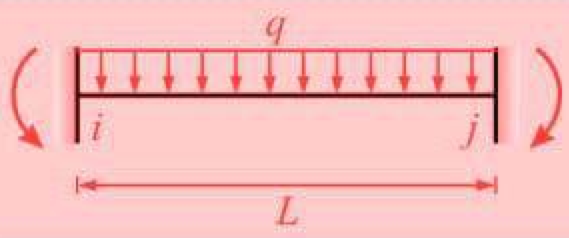
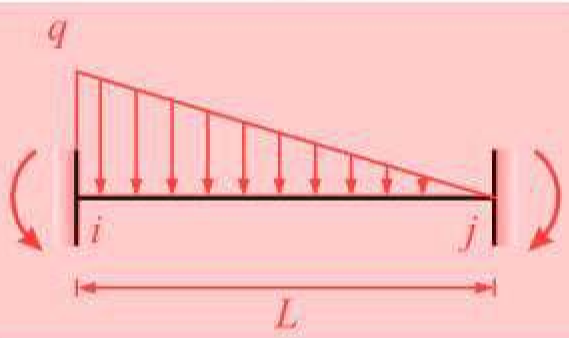
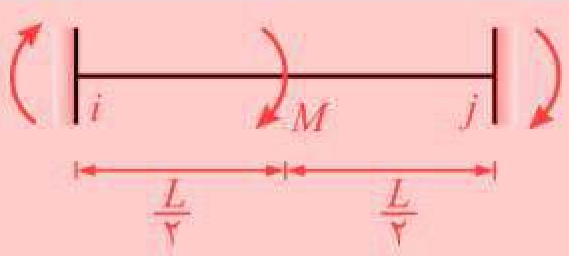
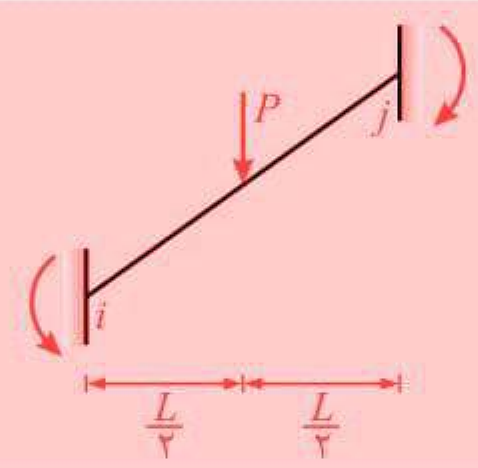
$$M_{ab} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_a + \theta_b - ۳\psi_{ab}) + FEM_{ab}$$

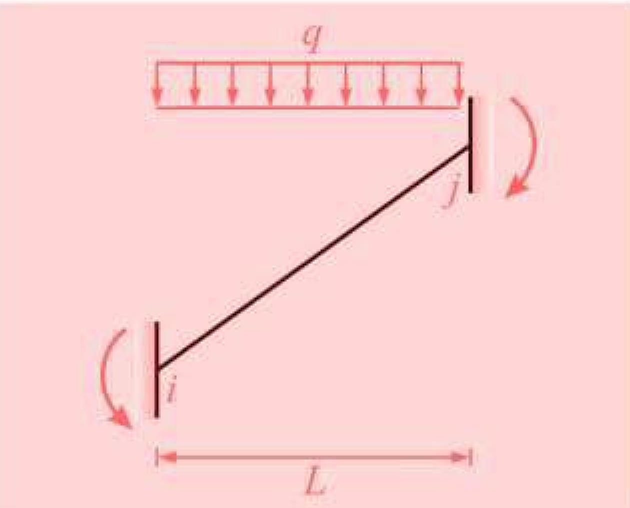
$$M_{ba} = \frac{۲EI}{L}(۲\theta_b + \theta_a - ۳\psi_{ba}) + FEM_{ba}$$

دقت شود که ψ_{ab} و ψ_{ba} با یکدیگر یکسان بوده و علامت آن با توجه به دوران محور عضو مشخص می‌شود. به‌طور مثال در شکل فوق، محور عضو (خط‌چین مایل)، نسبت به افق به‌صورت ساعتگرد دوران کرده و مثبت است.

نکته ۱: در روابط فوق، FEM معادل لنگر دو سر عضو، با فرض گیردار بودن ابتدا و انتهای عضو تحت بارگذاری وارده می‌باشد. FEM برای تیرهای جدول زیر لازم است به خاطر سپرده شود:

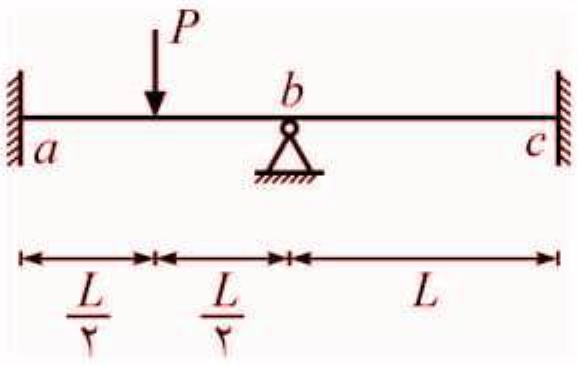
جدول ۱: لنگرهای گیرداری برای تیرهای مختلف

تیر تحت بارگذاری	FEM_{ij}	FEM_{ji}
	$-\frac{PL}{۸}$	$+\frac{PL}{۸}$
	$-\frac{Pab}{L}\times\frac{b}{L}$	$+\frac{Pab}{L}\times\frac{a}{L}$
	$-\frac{qL^{۲}}{۱۲}$	$+\frac{qL^{۲}}{۱۲}$
	$-\frac{qL^{۲}}{۲۰}$	$+\frac{qL^{۲}}{۳۰}$
	$+\frac{M}{۴}$	$+\frac{M}{۴}$
	$-\frac{PL}{۸}$	$+\frac{PL}{۸}$

$+\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	

دقت شود، در صورتی که تیر تحت بارگذاری قرار نداشته باشد، لنگرهای گیرداری برای آن صفر است.

تمرین ۴: در تیر مقابل EI ثابت و نیروی P بر سازه اثر کرده است:



الف) درجهٔ آزادی سازه کدام است؟

ب) دوران گره b کدام است؟

ج) لنگر در نقاط a و b کدام است؟

د) عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه a کدام است؟

حل:

الف) در این سازه، گره‌های سازه ثابت بوده و درجهٔ آزادی انتقالی صفر می‌باشد. ضمناً آزادی دورانی نیز تنها در گره b رخ می‌دهد. در نتیجه این سازه تنها یک درجهٔ آزادی دورانی در b داشته و تنها مجهول آن در روش شیب افت θ_b می‌باشد.

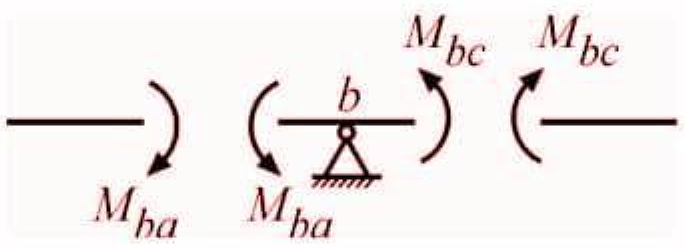
ب) برای به دست آوردن دوران گره b گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

گام اول (به دست آوردن M_{ba} و M_{bc}): ابتدا باید دقت شود که به علت گیردار بودن تکیه‌گاه‌های a وc، دوران‌های θ_a و θ_c صفر می‌باشد. همچنین با توجه به عدم جابه‌جایی قائم گره‌های a، b و c، چرخش‌های محور اعضاء (ψ_{bc},ψ_{ba}) برابر صفر است. ضمناً بر روی عضو bc بارگذاری اثر نکرده و لنگرگیرداری (FEM) در آن صفر بوده و برای عضو ab از تیر شماره (۱) در جدول (۱) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases}\theta_a=0\,,\ \theta_b=?\,,\ \psi_{ba}=0\,,\ FEM_{ba}=+\frac{PL}{8}\\ M_{ba}=\frac{2EI}{L}(2\theta_b+\theta_a-3\psi_{ba})+FEM_{ba}=\frac{2EI}{L}(2\theta_b)+\frac{PL}{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\theta_b=?\,,\ \theta_c=0\,,\ \psi_{ba}=0\,,\ FEM_{bc}=0\\ M_{bc}=\frac{2EI}{L}(2\theta_b+\theta_c-3\psi_{bc})+FEM_{bc}=\frac{2EI}{L}(2\theta_b)\end{cases}$$

گام دوم (بررسی تعادل دورانی گره b): برای به‌دست آوردن θ_b، معادلهٔ لنگر را در گره b بررسی می‌کنیم. در این قسمت دقت شود که لنگر انتهایی عضو در جهت ساعتگرد مثبت بوده و با توجه به این که عکس‌العمل آن به گره وارد می‌شود، بر روی گره، لنگر مثبت روش شیب افت را در جهت پادساعتگرد نشان می‌دهیم.



$$\sum M_b=0\ \Rightarrow\ M_{ba}+M_{bc}=0$$

$$\frac{2EI}{L}(2\theta_b)+\frac{PL}{8}+\frac{2EI}{L}(2\theta_b)=0\ \Rightarrow\ \theta_b=-\frac{PL^2}{64EI}$$

مقدمه

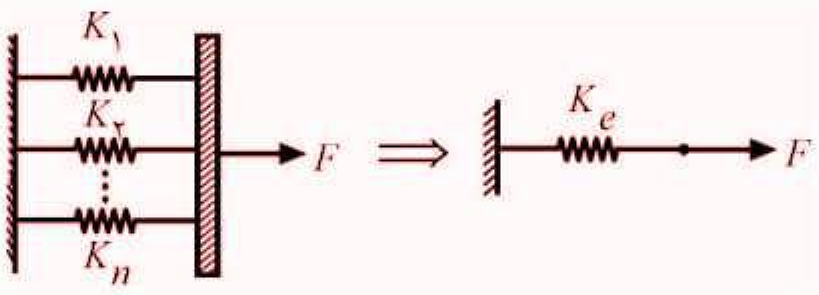
یکی از مهمترین فصل‌های تحلیل سازه‌ها و این کتاب فصل مدلسازی با فنر و تقارن می‌باشد. اهمیت این موضوع را می‌توان با تکرار سؤالات آن در آزمون‌های کارشناسی ارشد به وضوح مشاهده کرد که تقریباً در هر آزمون ۲ سؤال از این مبحث مطرح می‌شود. سهولت در تحلیل سازه‌های نامعین با کمک روش‌هایی که در این فصل خواهید آموخت از نکات بارز این فصل می‌باشد که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

۱-۱۰- مدلسازی با فنر

یکی از روش‌های تحلیل سازه‌های نامعین استفاده از تکنیک مدلسازی با فنر است که در ادامه و در قالب دو حالت سری و موازی به آن خواهیم پرداخت.

۱-۱-۱۰- اتصال موازی فنرها

در شکل زیر فنرهایی با سختی K_1، K_2، ... و K_n را به یک صفحهٔ صلب متصل کرده و نیروی F را بر مجموعه وارد می‌کنیم. در صورتی که جسم صلب دورانی نداشته باشد، تغییر طول فنرها یکسان بوده و اتصال را موازی می‌نامیم. در اتصال موازی، نیرو بین فنرها به نسبت سختی توزیع شده و به فنر با سختی بیشتر، نیروی بیشتری وارد می‌شود. در این اتصال نیروی هر فنر، سختی فنر معادل و تغییرمکان جسم صلب به ترتیب عبارت است از:

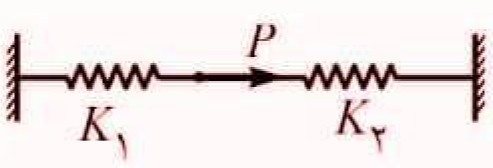


$$F_i = \frac{K_i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} F \;,\; K_e = \sum_{i=1}^{n} K_i \;,\; \Delta = \frac{F}{K_e} = \frac{F}{\sum K_i}$$

نکات مهم:

۱- روابط بیان شده تا زمانی اعتبار دارند که نیروی F باعث دوران جسم صلب نشود. در این حالت نیروی F در مرکز سختی مجموعه اثر کرده است.

۲- در اتصال نشان داده شده در شکل زیر، با توجه به بارگذاری، اندازهٔ تغییر طول فنرها یکسان بوده و اتصال دو فنر به‌صورت موازی عمل می‌کند. در این حالت نیرو بین فنرها به نسبت سختی توزیع می‌شود.



$$K_e = K_1 + K_2 \quad , \quad F_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} P \quad , \quad F_2 = \frac{K_2}{K_1 + K_2} P$$

بنابراین در تشخیص نوع اتصال فنرها، به جای شکل اتصال، عملکرد آن را بررسی می‌کنیم.

۲-۱-۱۰- اتصال سری فنرها

در شکل زیر فنرهای K_1، K_2 و ... را مطابق شکل متصل کرده‌ایم. در این مجموعه نیروی فنرها با یکدیگر یکسان و در حالت کلی تغییر طول آنها غیریکسان است.

$$P = P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_n$$

چنین اتصالی را سری می‌نامند.

نکات مهم:

۱- سختی فنر معادل در اتصال سری عبارت است از:

$$\frac{1}{K_e}=\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}+\cdots+\frac{1}{K_n}\xrightarrow{\text{برای دو فنر}}K_e=\frac{K_1K_2}{K_1+K_2}$$

۲- اگر فنر سختی بیشتری داشته باشد، تغییر طول آن کمتر است. به‌طور مثال اگر تغییر طول کل مجموعه Δ باشد، تغییر طول هر فنر عبارت است از:

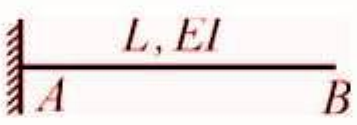
$$\overset{\text{یکسان}}{P}=\overset{\uparrow}{K}\,\overset{\downarrow}{\Delta}\Rightarrow \Delta_i=\frac{\frac{1}{K_i}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{K_i}}\Delta_{\text{کل}}$$

یعنی تغییر طول به نسبت عکس سختی بین فنرها توزیع می‌شود.

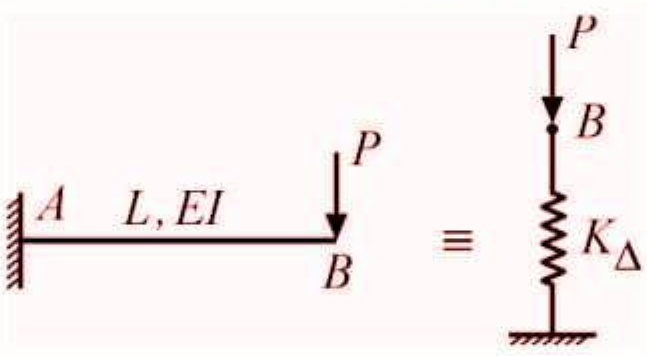
۳- در اتصال سری، سختی فنر معادل از سختی همهٔ فنرهای موجود در مجموعه کوچکتر است. به عبارتی اتصال سری فنرها، از سختی فنرها کاسته و باعث نرم‌تر شدن سازه می‌شود.

۱۰-۲- نحوهٔ محاسبه سختی معادل برای یک سازه

تیر یکسر گیردار نشان داده شده در شکل مقابل را در نظر بگیرید:

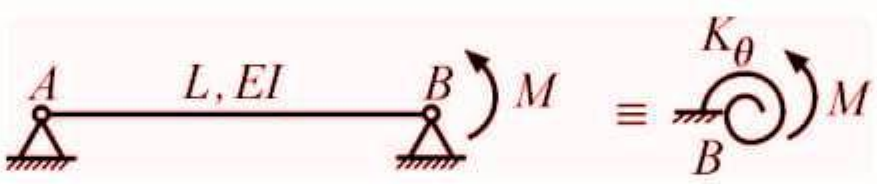


می‌خواهیم با توجه به رابطهٔ $K=\frac{P}{\Delta}$، سختی معادل این تیر در راستای قائم و برای نقطهٔ B را به‌دست آوریم. به این منظور بار قائم P را در نقطهٔ B وارد می‌کنیم و با توجه الگوی (۱) در فصل هفتم داریم:



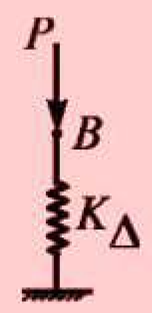
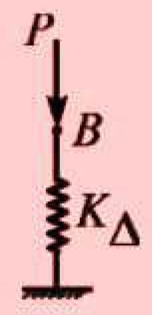
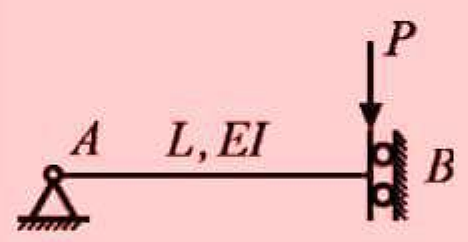
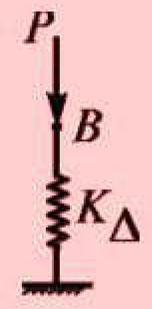
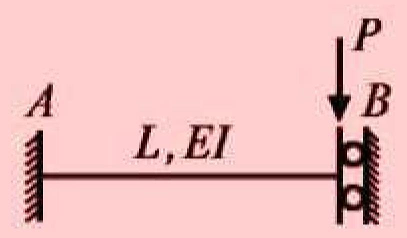
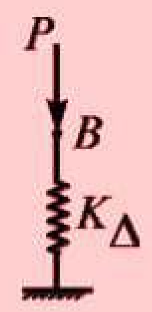
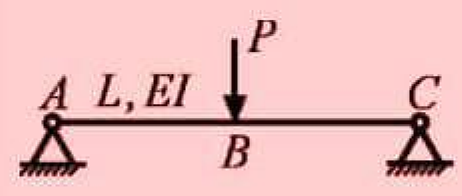
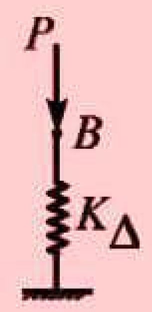
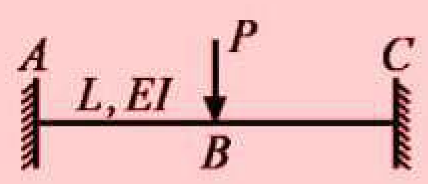
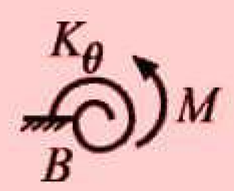
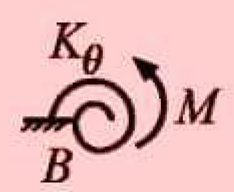
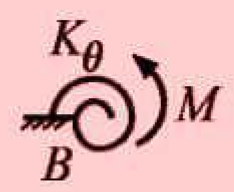
$$\begin{cases}\Delta_B=\frac{PL^3}{3EI}\\ K_\Delta=\frac{P}{\Delta_B}\end{cases}\Rightarrow K_\Delta=\frac{P}{\Delta_B}=\frac{3EI}{L^3}$$

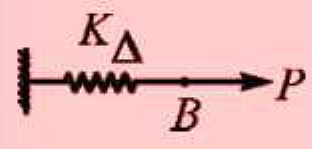
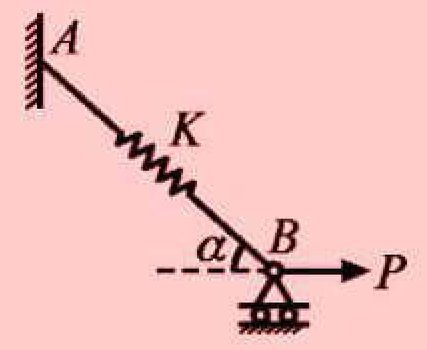
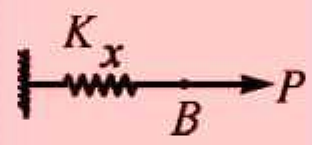
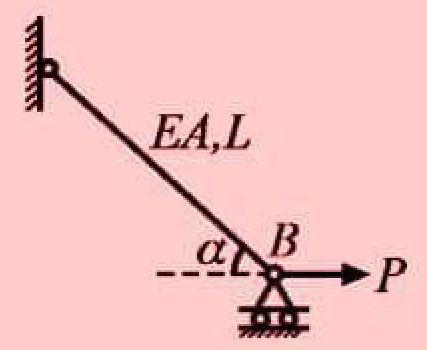
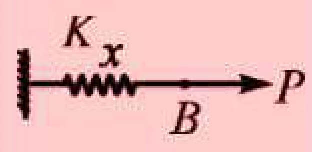
به عنوان مثالی دیگر برای به‌دست آوردن سختی دورانی تیر دو سر مفصل زیر در نقطهٔ B، لنگر M را در این نقطه وارده کرده و نسبت $\frac{M}{\theta_B}$ معادل سختی دورانی این نقطه است. با توجه به روابط تیر دو سر مفصل داریم:



$$\begin{cases}\theta_B=\frac{ML}{3EI}\\ K_\theta=\frac{M}{\theta_B}\end{cases}\Rightarrow K_\theta=\frac{3EI}{L}$$

با توجه به مفاهیم اشاره شده در این قسمت و همچنین خیز و شیب تیرهایی که در فصل‌های قبل به خاطر سپردیم، سختی سازه‌های مطرح شده در جدول صفحه بعد را به‌دست می‌آوریم. باید دقت شود که برای حل سوالات این فصل، نکات این جدول باید به خاطر سپرده شود.

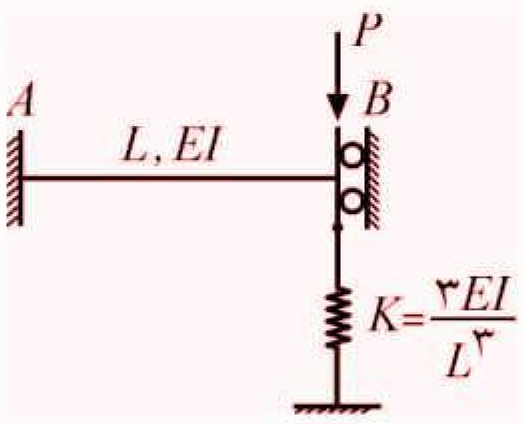
سختی فنر معادل	فنر معادل	شیب یا خیز سازهٔ موردنظر	سازهٔ موردنظر	
$K_{\Delta} = \frac{۳EI}{L^{۳}}$		$\Delta_B = \frac{PL^{۳}}{۳EI}$		۱)
$K_{\Delta} = \frac{۳EI}{L^{۳}}$		$\Delta_B = \frac{PL^{۳}}{۳EI}$		۲)
$K_{\Delta} = \frac{۱۲EI}{L^{۳}}$		$\Delta_B = \frac{PL^{۳}}{۱۲EI}$		۳)
$K_{\Delta} = \frac{۴۸EI}{L^{۳}}$		$\Delta_B = \frac{PL^{۳}}{۴۸EI}$		۴)
$K_{\Delta} = \frac{۱۹۲EI}{L^{۳}}$		$\Delta_B = \frac{PL^{۳}}{۱۹۲EI}$		۵)
$K_{\theta} = \frac{EI}{L}$		$\theta_B = \frac{ML}{EI}$		۶)
$K_{\theta} = \frac{۳EI}{L}$		$\theta_B = \frac{ML}{۳EI}$		۷)
$K_{\theta} = \frac{۴EI}{L}$		$\theta_B = \frac{ML}{۴EI}$		۸)

٩)		$\Delta_B = \frac{PL}{EA}$		$K_\Delta = \frac{EA}{L}$
١٠)		$(\Delta_x)_B = \frac{P}{K\cos^{۲}\alpha}$		$K_x = K\cos^{۲}\alpha$
١١)		$(\Delta_x)_B = \frac{PL}{EA\cos^{۲}\alpha}$		$K_x = \frac{EA}{L}\cos^{۲}\alpha$

موارد ٩ و ١١ در جدول فوق، در درس مقاومت مصالح مورد بحث قرار گرفته است.

باید دقت شود که با معادل کردن یک فنر مایل با یک فنر افقی (در صورتی که نقطهٔ انتهای فنر در راستای نیروی وارده جابه‌جا شود)، سختی فنر در $\cos^{۲}\alpha$ ضرب می‌شود (α زاویهٔ بین راستای نیرو و فنر می‌باشد).

برای درک بهتر مفاهیم فوق و نحوه استفاده از جدول به تمرینات زیر توجه کنید.



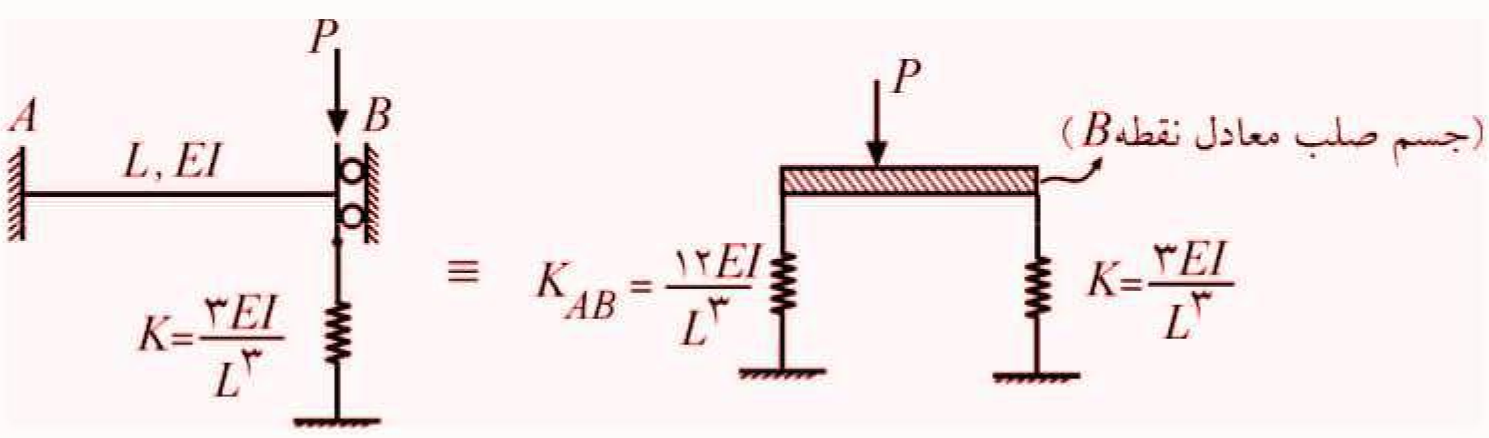
تمرین ١: در سازهٔ نشان داده شده:

الف) تغییرمکان نقطه اثر نیرو چقدر است؟

ب) مقدار نیروی ایجاد شده در فنر چقدر است؟

حل: می‌خواهیم با استفاده از ایدهٔ فنرها این سازه را تحلیل کنیم. با اندکی دقت مشاهده می‌شود که نقطـهٔ B از تیر AB و فنر به یک اندازه جابه‌جا شده است. با توجه به این که تنها بارگذاری وارد بر سازه بار P و در نقطهٔ B (نقطهٔ اتصال فنر و نقطهٔ B از تیر AB) می‌باشد، اگر تیر AB را با فنری در این نقطه معادل کنیم، با توجـه بـه یکسان بودن جابه‌جایی B و فنر، این فنر با فنر اصلی اتصال موازی دارد.

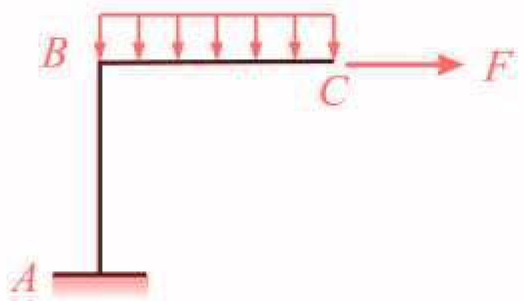
الف) در این سازه تیر AB با توجه به جدول دارای سختی $\frac{۱۲EI}{L^۳}$ بوده و با توجه روابط فنرهای موازی داریم:



سؤالات آزمون های کارشناسی ارشد و دکتری ۹۷

سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۹۷

۱- در سازه دو عضوی ABC ، طول هر یک از اعضا برابر L و صلبیت خمشی آن‌ها ثابت و برابر EI بوده و شدت بار گسترده یکنواخت اعمالی روی عضو BC برابر q است. قدرمطلق مقدار نیروی F چه ضریبی از qL باشد تا انرژی تغییر شکل خمشی سازه، حداقل شود؟



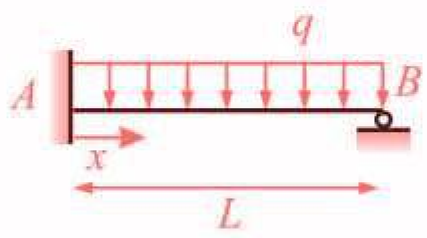
۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

۲- تیر AB که دارای صلبیت به‌صورت $EI(x) = EI_{\circ}(1-\frac{x}{L})^{۲}$ است. تحت اثر بارگذاری گسترده یکنواخت q مطابق شکل قرار دارد. لنگر تکیه‌گاهی M_A چه ضریبی از $qL^{۲}$ است؟



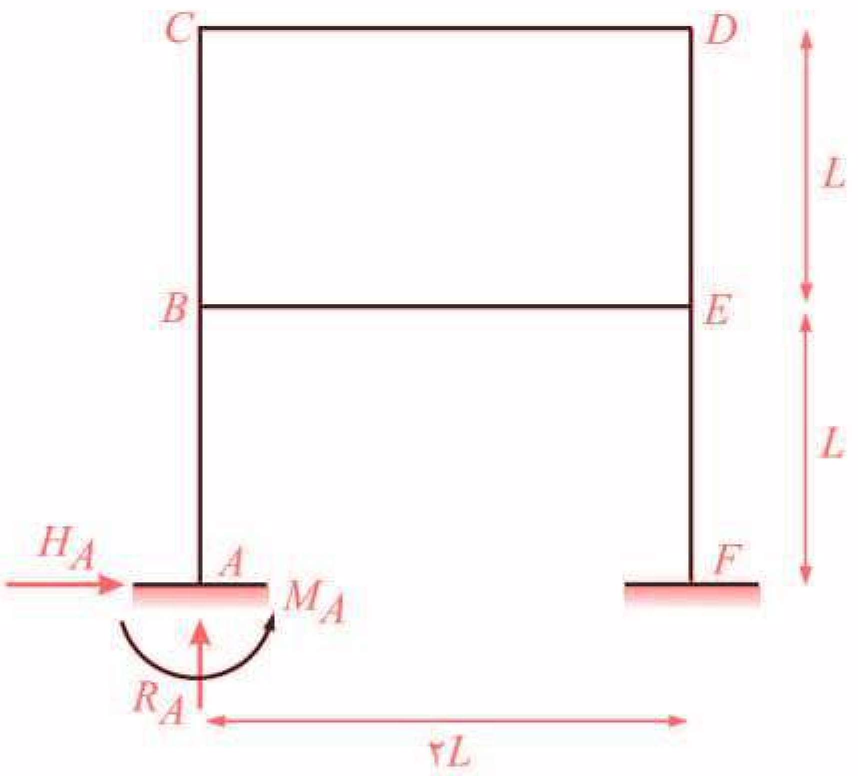
۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۳}{۸}$

۴) $\frac{۵}{۸}$

۳- قاب دو طبقه و یک دهانه با صلبیت خمشی EI یکسان برای تمام اعضا، تحت بارگذاری خاصی روی تیرهای خود، مطابق شکل داده شده است. چنانچه روابط بین نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاه A ، به‌صورت $R_A = \frac{۳}{۲}H_A$ و $M_A = \frac{۲}{۳}H_A L$ برقرار باشد. دوران نقطه B چه ضریبی از $\frac{H_A L^{۲}}{EI}$ است؟



۱) $\frac{۱۳}{۶}$

۲) $\frac{۱۱}{۶}$

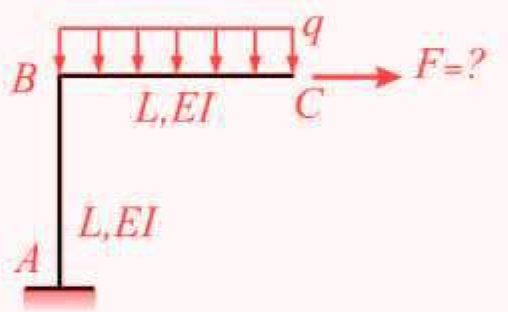
۳) $\frac{۷}{۶}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ سؤالات آزمون کارشناسی ارشد ۹۷

۱- (۲) - (متوسط)

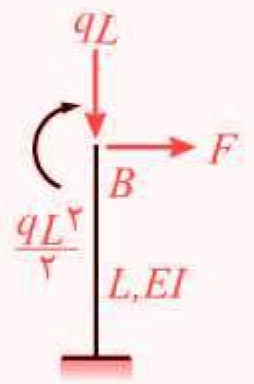
انرژی سازه حداقل شود



$$\begin{cases} \text{مفهوم ریاضی}: \dfrac{\partial u}{\partial F}=0 \\ \text{قضیه دوم کاستیلیانو}: \dfrac{\partial u}{\partial F}=\delta_{HC} \end{cases} \Rightarrow \delta_{HC}=0 \Rightarrow \delta_{HB}=0$$

بعد از حذف قسمت BC و انتقال بارهای آن به گره B داریم:

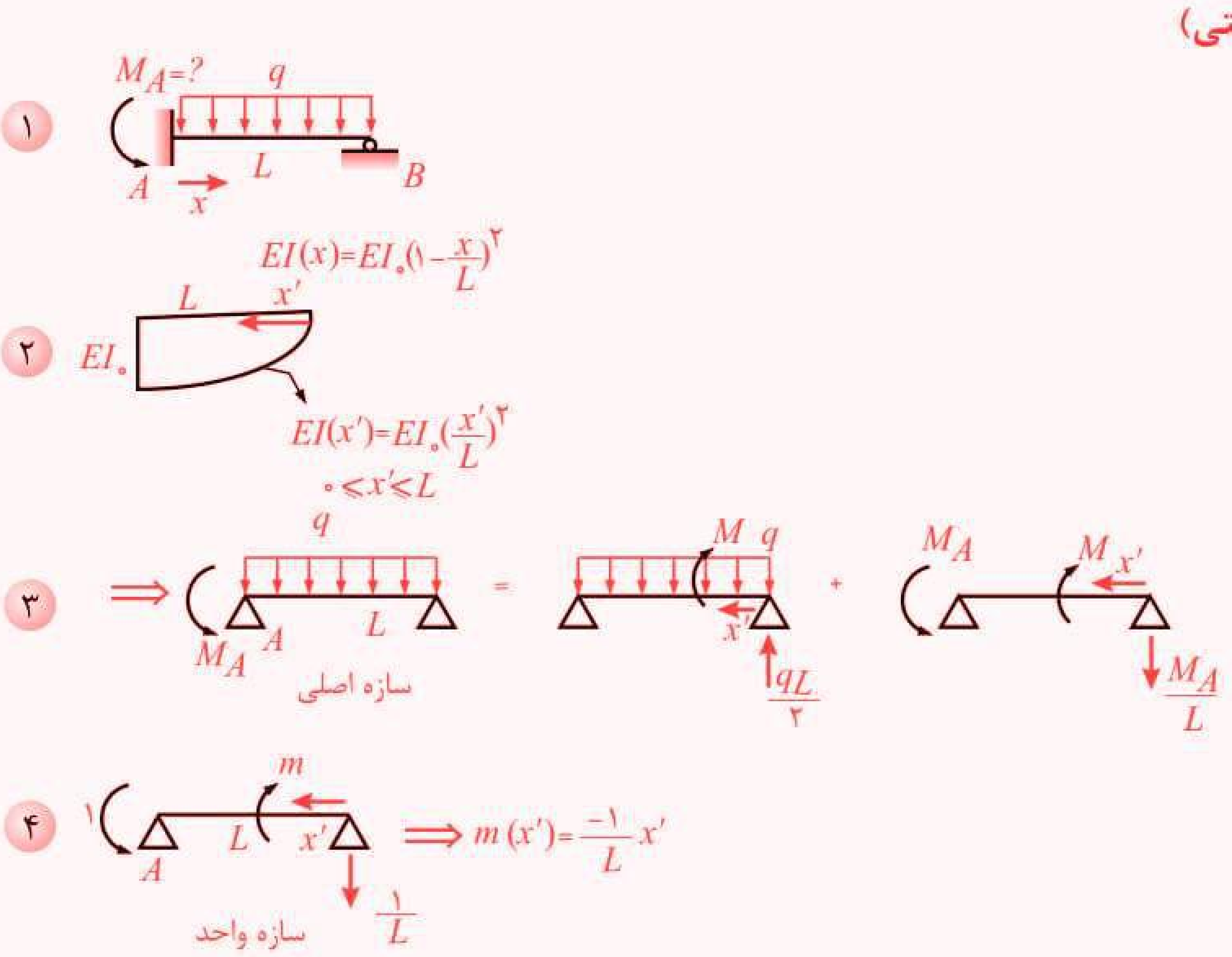
$$\overbrace{\text{فرمول(۲)} \quad \text{فرمول(۱)}}^{\text{روابط حفظی}}$$



$$\delta_{HB}=0 \Rightarrow \frac{F\times L^3}{3EI}-\frac{(\frac{qL^2}{2})\times L^2}{2EI}=0 \Rightarrow \boxed{F=\frac{3}{4}qL}$$

البته جهت نیروی F باید به سمت چپ باشد.

۲- (۲) - (دشوار - استقامتی)

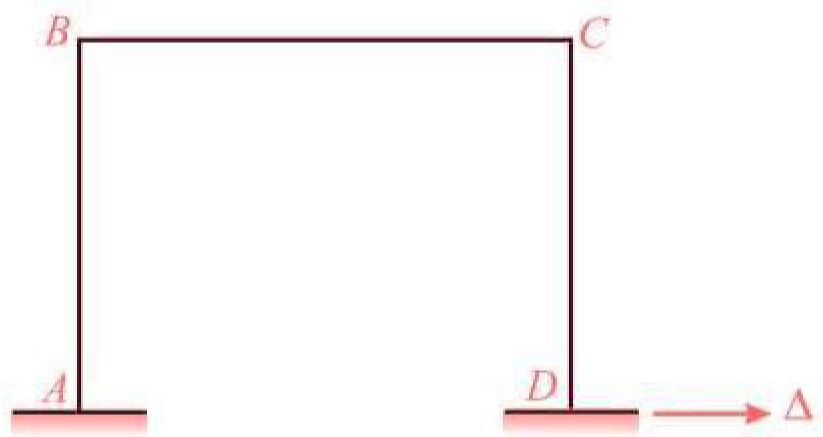


سؤالات آزمون دکتری ۹۷

۱- در یک تیر دو سر گیردار با صلبیت خمشی ثابت EI ، نیروی متمرکز قائم P در نقطه D بـه فاصـله L_1 از A (تکیه‌گاه سمت چپ) و L_2 از B (تکیه‌گاه سمت راست) اعمال می‌شود. اگر قدرمطلق لنگر در A و B به ترتیـب a و b باشند، قدرمطلق لنگر در D کدام است؟

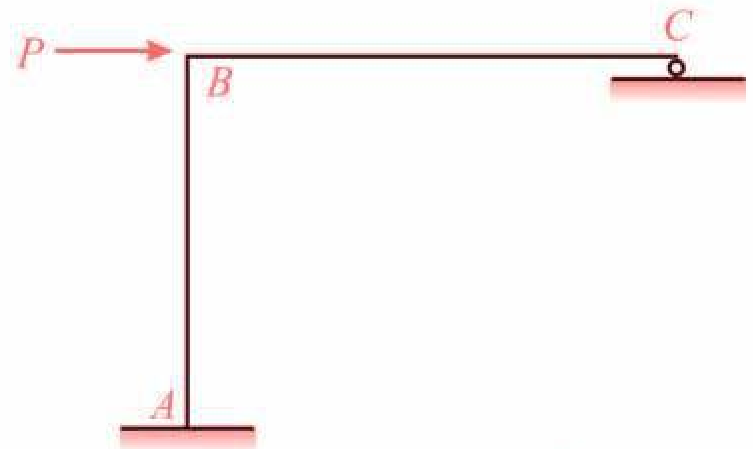
۱) $\frac{aL_1+bL_2}{2L_1L_2}$ ۲) $\frac{aL_2+bL_1}{2L_1L_2}$ ۳) $\frac{aL_1+bL_2}{L_1+L_2}$ ۴) $\frac{aL_2+bL_1}{L_1+L_2}$

۲- در قاب مطابق شکل، ارتفاع هر دو ستون AB و DC طول تیر BC برابر L و صلبیت خمشی هـر یـک از دو ستون برابر EI و صلبیت خمشی تیر برابر $2EI$ می‌باشند. لنگر M_{BC} در اثر تغییر مکان خمشی Δ در تکیه‌گاه D چه ضریبی از $\frac{EI\Delta}{L^2}$ است؟



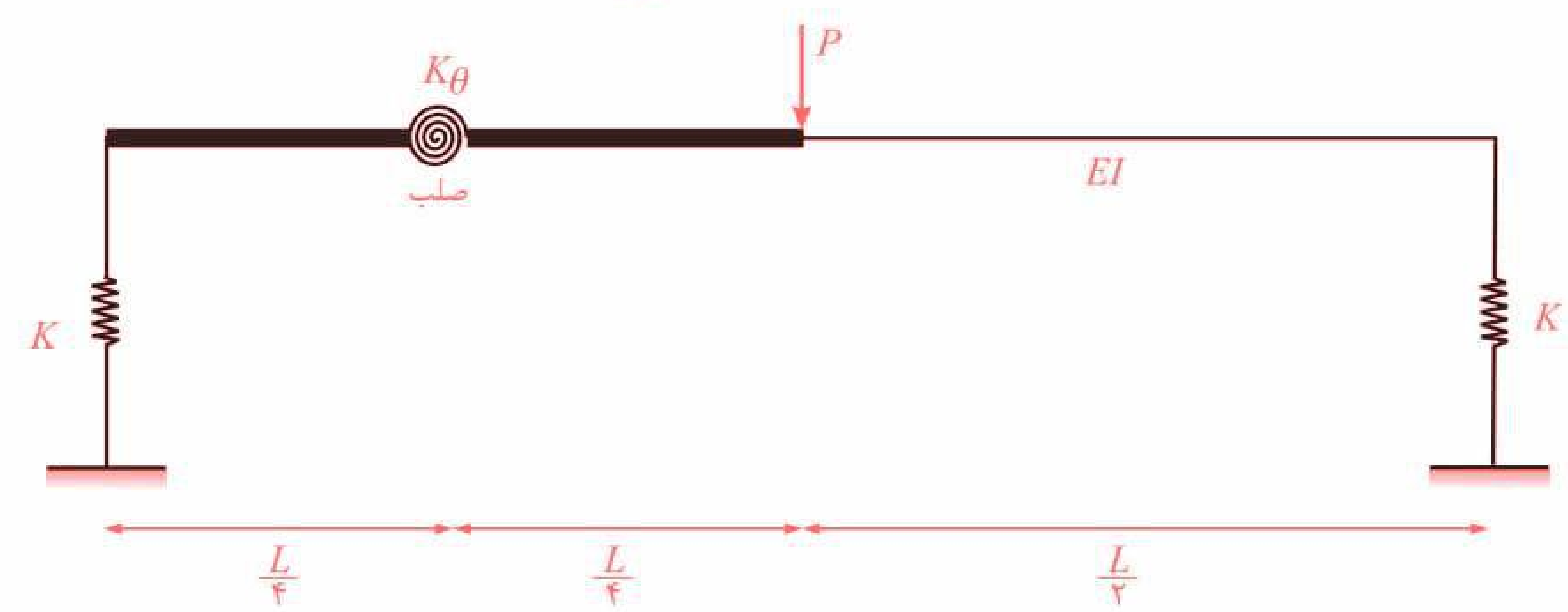
۱) ۳
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۱
۴) $\frac{1}{2}$

۳- در سازه مطابق شکل، طول تیر BC و ارتفاع ستون AB برابر L و صلبیت خمشی هـر دو ثابـت و برابـر EI می‌باشد. چنانچه در تکیه‌گاه غلتکی C، ضریب اصطکاک برابر f باشد، عکس‌العمل قـائم تکیـه‌گـاه C از کـدام رابطه حاصل می‌شود؟



۱) $\frac{3P}{(f+8)}$ ۲) $\frac{3P}{(3f+8)}$
۳) $\frac{P(3+2f)}{(8+3f)}$ ۴) $\frac{P(3+2f)}{(8+6f+f^2)}$

۴- در تیر مطابق شکل، صلبیت خمشی در نیمه راست برابر EI بوده و نیمه چپ آن از دو قسمت صلب که با فنر دورانی با سختی $K_\theta = \frac{EI}{2L}$ به هم متصل هستند، تشکیل شده است. تکیـه‌گـاه‌هـا نیـز فنـری و بـا سـختی قائم $K = \frac{2EI}{L^3}$ می‌باشند. تغییر مکان قائم وسط دهانه چه ضریبی از $\frac{PL^3}{EI}$ است؟



۱) $\frac{1}{24}$
۲) $\frac{1}{96}$
۳) $\frac{7}{24}$
۴) $\frac{29}{96}$