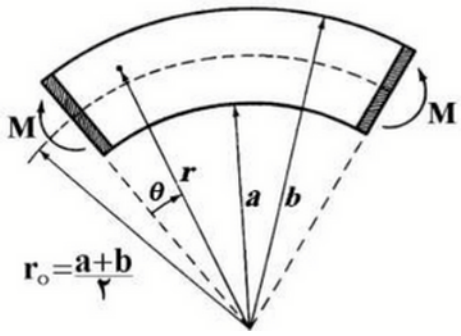
پاسخ تشریحی

الاستیسیته – دکتری 1400

دکتر واعظی

@Dr_Zarfam

۳۴- یک تیر خمیده با سطح مقطع مستطیل باریک، محوری به فرم یک کمان از دایره دارد و ممان خمشی M بر دو انتهای صلب آن وارد می‌شود. کدام گزینه در مورد این تیر صحیح است؟



۱) مقطع عرضی عضو، تخت باقی نمی‌ماند.

۲) محور خنثی مقطع از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند.

۳) کرنش ε_θ به‌طور خطی در ارتفاع مقطع تغییر نمی‌کند. ✓

۴) همهٔ موارد درست است.

سازه‌ستقارن محوری است

$\varphi = a_1 \log r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log r$

$$\sigma_r = -\frac{4M}{N}\left[\frac{a^2b^2}{r^2}\log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2\log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2\log\left(\frac{a}{r}\right)\right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4M}{N}\left[-\frac{a^2b^2}{r^2}\log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2\log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2\log\left(\frac{a}{r}\right) + b^2 - a^2\right]$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$N = (b^2-a^2)^2 - 4a^2b^2\left[\log\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$$

$$u_\theta = \frac{4a_{04}}{E} r\theta + C_1\cos(\theta) - C_2\sin(\theta) + C_3 r,$$

چون u_θ تابعی خطی از r است صفحات تخت باقی می‌ماند!

چون هم σ_r و هم σ_θ توابعی غیرخطی از r هستند $\varepsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E} - \nu\frac{\sigma_r}{E}$ نیز برحسب r خطی نیست. بنابراین صفحات تخت باقی می‌مانند ولی برخلاف تیرهای صاف مرکز سطح محل $\sigma_\theta = 0$ نخواهد بود.

waezi@shahed.ac.ir

۳۵- کدام عبارت صحیح است؟

۱) در مصالح ارتوتروپیک راستاهای اصلی تنش و کرنش بر هم منطبق هستند.

۲) در مصالح ایزوتروپیک ویژگی‌های مکانیکی در تمام نقاط جسم یکسان است.

۳) مصالح ارتوتروپیک دارای پنج ثابت الاستیک مستقل هستند.

۴) مصالح مونوکلینیک دارای یک محور تقارن الاستیک هستند.

گزینه ۲ نادرست است چون تعریف نوشته شده مربوط به ساده هلگن است نه ایزوتروپیک

" ۳ نادرست است چون تعداد پارامترهای ثابت Orthotropic برابر ۹ است.

" ۴ نادرست است. چون در مصالح مونوکلینیک تقارن نسبت به محور وجود ندارد فقط رفتار در یک جهت + و - برابر است. ماده‌ای که دارای یک محور تقارن است ایزوتروپ جانبی است.

گزینه ۱ درست است چون اگر $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{23}=0$ در آن صورت $\varepsilon_{12}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=0$ خواهد بود پس محورهای اصلی تنش و کرنش یکی خواهد بود.

waezi@shahed.ac.ir

۳۶- در یک جسم جامد الاستیک دارای رفتار خطی، مؤلفه‌های تنش و کرنش به‌صورت $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl}$ و $\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}\,\sigma_{kl}$ و برای یک ماده همسانگرد تانسور C_{ijkl} به‌صورت $C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})$ برحسب ثوابت لامه است. حال اگر تانسور D_{ijkl} را به‌صورت $D_{ijkl} = A\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk})$ تعریف کرده باشیم، ثوابت A و B به‌ترتیب کدام هستند؟

۱) $\frac{۱}{۴\mu}\ ,\ -\frac{\lambda+\mu}{\mu(۳\lambda+۲\mu)}$

۲) $\frac{۱}{\mu}\ ,\ \frac{۱}{\lambda}$

۳) $\frac{۱}{۴\mu}\ ,\ -\frac{\lambda}{۲\mu(۳\lambda+۲\mu)}$ ✓

۴) $\frac{۱}{\mu}\ ,\ -\frac{۱}{۲(\lambda+\mu)}$

$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$

$e_{ij} = \frac{۱}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\sigma_{kk}\delta_{ij}\right)$

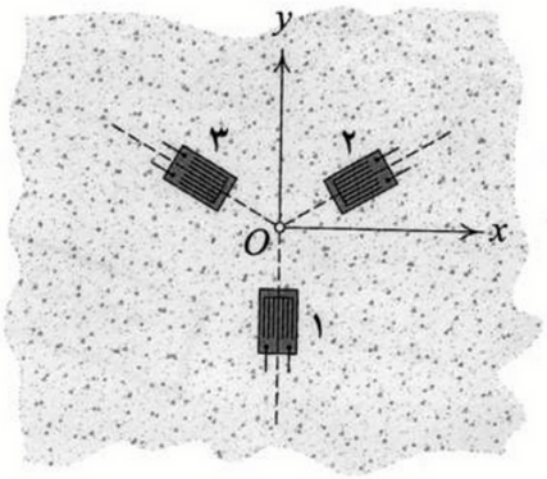
$D_{ijkl}\,\sigma_{kl} = A\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk} + 2B\,\sigma_{ij} = e_{ij}$

$2B = \frac{۱}{2\mu} \longrightarrow B = \frac{۱}{4\mu}$

$A = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}$

waezi@shahed.ac.ir

۳۷- ابزاری به نام گلبرگ کرنش (Strain rosette) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توان کرنش‌های طولی را در سه راستای مختلف اندازه‌گیری کرد. مطابق شکل، در نقطه‌ای از یک سازه بتنی، یک گلبرگ کرنش دارای بازوهایی با زوایای 120° نسبت به هم کار گذاشته شده است. حال اگر مقادیر کرنش طولی اندازه‌گیری شده توسط بازوهای شماره ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب برابر با $2/5\times10^{-3}$، 3×10^{-3} و $-1/5\times10^{-3}$ باشند، مؤلفه کرنش ε_{xx} در آن نقطه کدام است؟



۱) $-\frac{1}{3}\times10^{-3}$

۲) $\frac{1}{6}\times10^{-3}$ ✓

۳) $\frac{13}{6}\times10^{-3}$

۴) $\frac{11}{6}\times10^{-3}$

$\varepsilon_y = 2.5\times10^{-3}$

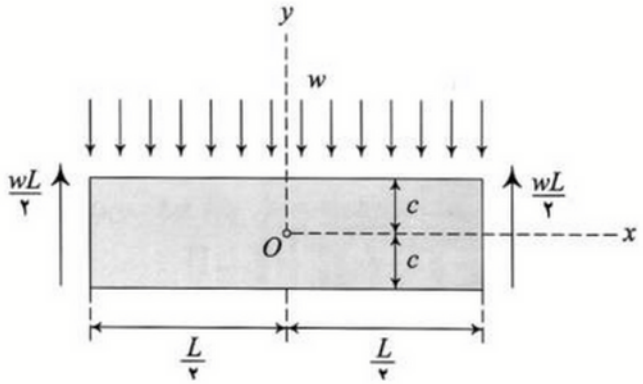
$$\begin{cases} \varepsilon_{30^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos 2\times30^\circ + \varepsilon_{xy}\times\sin 2\times30^\circ = 3\times10^{-3} \\ \varepsilon_{150^\circ} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos(2\times150^\circ) + \varepsilon_{xy}\sin(2\times150^\circ) = -1.5\times10^{-3} \end{cases}$$

$$1.5\times10^{-3} = \varepsilon_x + 2.5\times10^{-3} + \frac{\varepsilon_x - 2.5\times10^{-3}}{2} \longrightarrow$$

$$\varepsilon_x = \left(1.5 - \frac{2.5}{2}\right)\times10^{-3} / \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1/4}{3/2}\times10^{-3} = \frac{1}{6}\times10^{-3}$$

waezi@shahed.ac.ir

۳۸- تیر نشان داده شده در شکل دارای شرایط تکیه‌گاهی ساده و طول L با مقطع مستطیلی به پهنای واحد و ارتفاع ۲c است که تحت اثر بار گسترده یکنواختی به شدت w قرار دارد. برای تابع تنش Airy عبارت $U=-\frac{w}{۴}x^۲-\frac{۳w}{۸c}x^۲y+Ky^۳+\frac{w}{۸c^۳}x^۲y^۳-\frac{w}{۴۰c^۳}y^۵$ برقرار است. اگر در این تیر $c \ll L$ باشد، مقدار K کدام است؟



۱) $-\frac{wL^۲}{۸c^۳}$

۲) $\frac{w}{۲۰c}$

۳) $\frac{w}{۵c}$

۴) $-\frac{wL^۲}{۳۲c^۳}$ ✓

$-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}=\tau_{xy}$

$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\sigma_y$

$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\sigma_x=6ky+\frac{6w}{8c^3}x^2y-\frac{w}{2c^3}y^3$

$=6y\left(k+\frac{wx^2}{8c^3}\right)-\frac{w}{2c^3}y^3$

@ $x=\pm\frac{L}{2}$, $\int_{-c}^{c}\sigma_x\,dy=0$ ← خود به خود برقرار است

@ $x=\pm\frac{L}{2}$, $\int_{-c}^{c}\sigma_x\,y\,dy=0 \rightarrow \int_{-c}^{c}\left\{6y^2\left(k+\frac{wL^2}{32c^3}\right)-\frac{w}{2c^3}y^4\right\}dy=0$

$6\left(k+\frac{wL^2}{32c^3}\right)\times\frac{2}{3}c^3-\frac{w}{2c^3}\times\frac{2}{5}c^5=0 \rightarrow$

$k+\frac{wL^2}{32c^3}=\frac{w}{20c} \rightarrow k=w/c\left(\frac{1}{20}-\frac{L^2}{32c^2}\right)$

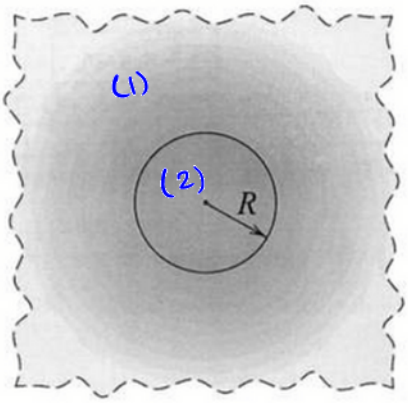
$\leftarrow 1 \ll L^2/c^2 \leftarrow L \gg c$ چون

$$k=-\frac{wL^2}{32c^3}$$

waezi@shahed.ac.ir

۳۹- محیطی نامتناهی را متشکل از دو جنس ماده مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. ثوابت لامه در محدوده $R < r$ برابر با $\lambda_1 = \mu_1$ و در محدوده $0 < r < R$ برابر با $\lambda_2 = \mu_2 = 2\mu_1$ می‌باشند. در این مسأله که دارای تقارن محوری است و در شرایط کرنش مسطحه (plane strain) قرار دارد، مؤلفه شعاعی میدان جابجایی از معادله $u_r = \begin{cases} Ar & 0 < r < R \\ \frac{B}{r} & R < r \end{cases}$ به‌دست می‌آید. مقدار A و B به‌ترتیب کدام است؟ (می‌دانیم که مؤلفه‌های غیرصفر کرنش نیز در این مسأله از معادلات زیر به‌دست می‌آیند که در آن ε_0 مقداری ثابت است.)

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \begin{cases} \frac{u_r}{r} - \varepsilon_0 & 0 < r < R \to A - \varepsilon_0 \\ \frac{u_r}{r} & R < r \to B/r^2 \end{cases} \qquad \varepsilon_{rr} = \begin{cases} \frac{du_r}{dr} - \varepsilon_0 & 0 < r < R \to A - \varepsilon_0 \\ \frac{du_r}{dr} & R < r \to -B/r^2 \end{cases}$$



$$u_r^{(1)}\big|_{r=R} = u_r^{(2)}\big|_{r=R}$$

$$AR = \frac{B}{R} \to \boxed{B = AR^2}$$

۱) $\frac{4\varepsilon_0}{3}R^2$ و $\frac{4\varepsilon_0}{3}$

۲) $\frac{4\varepsilon_0}{5}R^2$ و $\frac{4\varepsilon_0}{5}$ ✓

۳) $\frac{\varepsilon_0}{2}R^2$ و $\frac{\varepsilon_0}{2}$

۴) $\frac{3\varepsilon_0}{5}R^2$ و $\frac{3\varepsilon_0}{5}$

$$\sigma_r = \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + 0) + 2\mu\varepsilon_{rr}$$

$$\sigma_r^{(2)} = \lambda_2(A - \varepsilon_0 + A - \varepsilon_0) + 2\mu_2(A - \varepsilon_0) = 2(\mu_2 + \lambda_2)(A - \varepsilon_0) = 8\mu_1(A - \varepsilon_0)$$

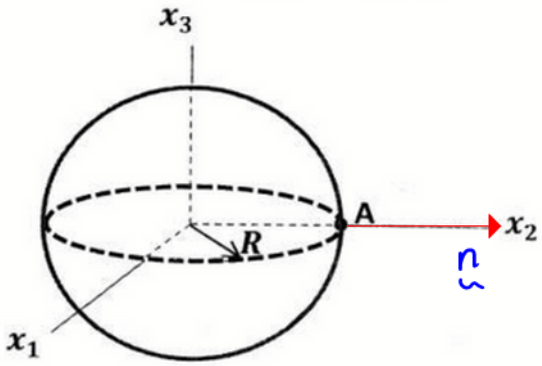
$$\sigma_r^{(1)} = \lambda_1\left(-B/R^2 + B/R^2 + 0\right) + 2\mu_1\left(-\frac{B}{R^2}\right) = -2\mu_1\frac{B}{R^2}$$

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} \to 8\mu_1(A - \varepsilon_0) = -2\mu_1\frac{B}{R^2} = -2\mu A$$

$$4(A - \varepsilon_0) = -A \to A = \frac{4\varepsilon_0}{5}, \quad B = \frac{4\varepsilon_0}{5}R^2$$

waezi@shahed.ac.ir

۴۰- کره فلزی توپر نشان داده شده در شکل زیر، پس از باربرداری، دارای تنش‌های پسماند است. شعاع کره R است. اگر σ_{ij} ها مؤلفه‌های کارتزین ماتریس تنش در نقطه $A(0,R,0)$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟



۱) $\sigma_{31}+\sigma_{32}+\sigma_{33}=0$

۲) $\sigma_{11}+\sigma_{12}+\sigma_{13}=0$

۳) $\det[\sigma_{ij}]=0$ ✓

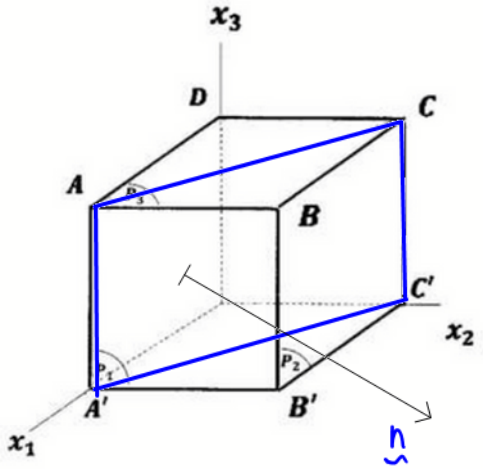
۴) $\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=0$

$\underset{\sim}{n}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \underset{\sim}{T}^{n}=[\sigma]\{n\}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}&\sigma_{13}\\ \sigma_{21}&\sigma_{22}&\sigma_{23}\\ \sigma_{31}&\sigma_{32}&\sigma_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\\0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{32}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$

چون یکی از ستون‌ها صفر است در نتیجه دترمینان ماتریس برابر صفر است.

waezi@shahed.ac.ir

۴۱- مکعب نشان داده شده در شکل زیر با طول اضلاع a به نحوی بارگذاری شده است که وضعیت تنش همگن در آن برقرار است. اگر بردارهای تراکشن (Traction) نظیر صفحات P_1، P_2 و P_3 به‌صورت $\vec{t}^{(1)}=(1,-1,0)$, $\vec{t}^{(2)}=(-1,1,2)$, $\vec{t}^{(3)}=(0,2,2)$ باشند، بردار تراکشن نظیر صفحه $ACC'A'$ کدام است؟



۱) $(0,0,\sqrt{2})$ ✓

۲) $(0,2,4)$

۳) $(2,2,-2)$

۴) $(0,0,2)$

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{n}=\begin{Bmatrix}\sqrt{2}/2\\ \sqrt{2}/2\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\{T^n\}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 2\end{Bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{2}\end{Bmatrix}$$

waezi@shahed.ac.ir

۴۲- ماتریس کرنش در نقطه **O**، مبدأ دستگاه مختصات کارتزین **xyz**، به‌صورت $[\varepsilon]=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۰\\ ۳ & -۶ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۴\end{bmatrix}\times ۱۰^{-۳}$ است،

حداکثر تغییر زاویه بین راستاهای گذرنده از نقطه **O** چند رادیان است؟

۱) ۰/۰۰۵۵

۲) ۰/۰۰۵

۳) ۰/۰۱۰

۴) ۰/۰۱۱ ✓

$$\begin{cases}\varepsilon_{1,2}=\frac{2-6}{2}\pm\sqrt{4^2+3^2}=-2\pm5\\ \varepsilon_3=4\end{cases}$$

$10^{-3}\times(-7,3,4)\longrightarrow$ کرنش‌های اصلی

$\gamma_{max}=10^{-3}(4-(-7))=11\times10^{-3}$

waezi@shahed.ac.ir

۴۳- **در جسمی با چگالی جرمی ρ در معرض میدان گرانش، میدان تنش یکنواخت برقرار است. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درخصوص وضعیت حرکتی جسم صحیح است؟**

۱) ذرات جسم دارای حرکت دینامیکی هستند.

۲) ذرات جسم در حال تعادل استاتیکی هستند.

۳) برای تعیین وضعیت حرکتی جسم، اطلاع از شرایط مرزی لازم است.

۴) برای تعیین وضعیت حرکتی جسم، اطلاع از شرایط مرزی و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون لازم است.

$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$

از آنجایی که میدان تنش یکنواخت است $\sigma_{ij,k} = 0$ پس $\sigma_{ij,j} = 0$

بنابراین

پس نیروهای بدنه‌ای وارده باید صفر باشند $\rightarrow F_i = 0$

$F_i = \rho g - \rho a_z = 0 \rightarrow$ در راستای z

$a_z = g \rightarrow$ پس جسم در حالت سقوط آزاد در راستای z است!

waezi@shahed.ac.ir

۴۴- **دو جسم ایزوتروپ و همگن با هندسه و بارگذاری یکسان در شرایط تنش صفحه‌ای داریم که دارای دو جنس متفاوت هستند، یعنی چگالی، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون آن‌ها متفاوت است. در غیاب نیروهای حجمی (no body force)، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟**

۱) میدان تنش و کرنش در دو جسم یکسان است.

۲) هیچ یک از میدان‌های تنش و کرنش دو جسم یکسان نیست.

۳) میدان کرنش در دو جسم یکسان است ولی میدان تنش متفاوت است.

۴) میدان تنش در دو جسم یکسان است ولی میدان کرنش آن‌ها متفاوت است. ✓

در غیاب نیروهای حجمی $\nabla^4 \varphi = 0 \longrightarrow$

پس φ و نیز σ ربطی به جنس ماده ندارد ولی ε به E و ν ربط دارد. چون

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

waezi@shahed.ac.ir

۴۵- در یک جسم الاستیک خطی ایزوتروپ و همگن، در وضعیت تعادل استاتیکی، شرایط کرنش صفحه‌ای در صفحه xy حاکم و معادله $\sigma_{zz} = 2x^2 + ky^2$ برقرار است. اگر نیروی گسترده حجمی نداشته باشیم (no body force)، مقدار صحیح k کدام است؟

۱) -2 ✓

۲) k با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شود.

۳) ۲

۴) صفر

$\upsilon(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \sigma_{zz}$ در شرایط کرنش صفحه‌ای

$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ در شرایط کرنش صفحه‌ای و نیروی بدنه‌ای صفر

$4 + 2k = 0 \longrightarrow k = -2$

waezi@shahed.ac.ir