پاسخ تشریحی

دینامیک سازه- دکتری ۹۹

دکتر واعظی

@Dr_Zarfam

۲۱- **کدام گزینه در مورد فرکانس‌های یک سازهٔ پایدار صحیح است؟**

۱) فرکانس‌ها بسته به توزیع جرم و سختی و وجود نامنظمی در ساختمان ممکن است حقیقی یا مختلط باشند و فرکانس‌ها در مودهای ارتعاشی بالاتر نسبت به مود غالب کمتر است.

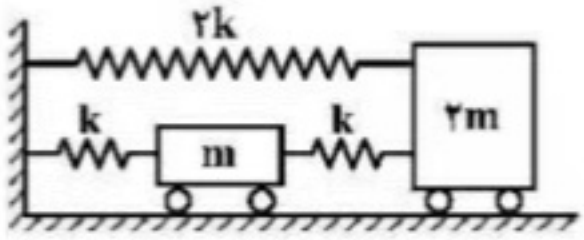
۲) فرکانس‌ها بسته به توزیع جرم و سختی و وجود نامنظمی در ساختمان ممکن است حقیقی یا مختلط باشند و فرکانس‌ها در مودهای ارتعاشی بالاتر نسبت به مود غالب بیشتر است.

۳) فرکانس‌ها همواره عدد حقیقی بوده و در مودهای ارتعاشی بالاتر در مقایسه با مود غالب سازه کمتر است.

۴) فرکانس‌ها همواره عدد حقیقی بوده و در مودهای ارتعاشی بالاتر در مقایسه با مود غالب سازه بیشتر است.

فرکانس های هر سیستم پایداری باید حقیقی باشند چون ماتریس های سختی و جرم سیستم قطعی هستند حتماً مثبت خواهند بود و فرکانس مودهای بالاتر به علت انرژی تیانسیل بالاترشان بزرگتر از مودهای پایین تر است.

۲۲- فرکانس‌های مود اول و مود دوم سیستم دینامیکی نمایش داده شده چقدر است؟

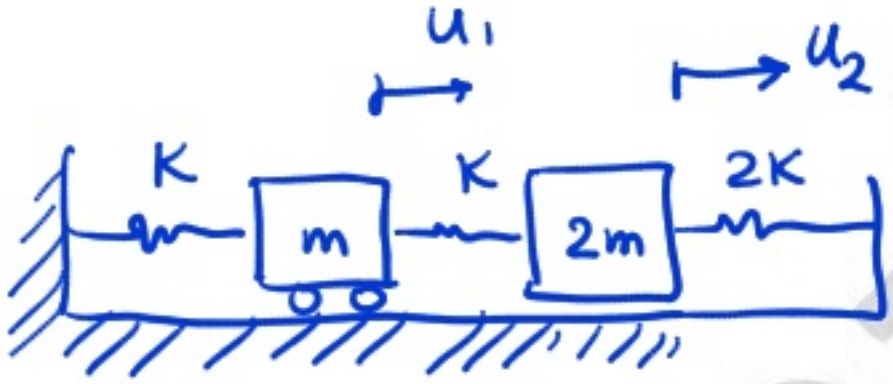


۱) $\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{۵k}{m}}$

۲) $\sqrt{\frac{k}{m}}, \sqrt{\frac{۵k}{۲m}}$ ✓

۳) $\sqrt{\frac{۲k}{m}}, \sqrt{\frac{۳k}{۲m}}$

۴) $\sqrt{\frac{۲k}{m}}, \sqrt{\frac{۵k}{m}}$



$$[K] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix} \qquad [m] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$\left| K \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - m\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2\lambda^2 - 7\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{4} = \frac{7 \pm 3}{4}$$

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\lambda_2 = 5/2 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{5}{2}\frac{K}{m}}$$

۲۳- یک سیستم یک درجه آزادی تحت اثر بار هارمونیکی $P(t) = P_0 \sin \Omega t$ قرار گرفته است. کدام‌یک از عبارات زیر در مورد ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی پاسخ پایدار درست است؟

۱) در یک سیستم میرا، اگر بار به آرامی تغییر کند، این ضریب به سمت واحد میل می‌کند.

۲) در یک سیستم میرا، زمانی‌که نسبت فرکانسی برابر واحد باشد، این ضریب به بی‌نهایت میل می‌کند.

۳) در یک سیستم میرا، این ضریب همواره به ازای جمیع مقادیر نسبت فرکانسی از یک بزرگ‌تر است.

۴) در یک سیستم میرا، درصورتی‌که بار هارمونیکی سریع تغییر کند، این ضریب به بی‌نهایت میل می‌کند.

$$P(t) = P_0 \sin \Omega t$$

$$u_p(t) = \frac{P_0}{K} D \sin(\Omega t - \varphi)$$

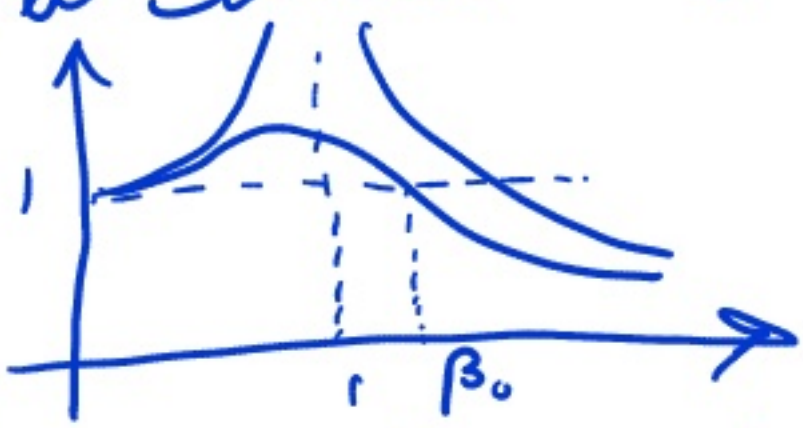
$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad \beta = \frac{\Omega}{\omega}$$

گزینه ۱ * اگر بار به آرامی تغییر کند یعنی $\beta \ll 1$ ← $D = 1$ ← درست است

گزینه ۲ * اگر $\beta = 1$ ← $D = \frac{1}{2\xi}$ به بی‌نهایت میل نمی‌کند

گزینه ۳ * به ازای $\beta > \beta_0$ ← $D < 1$ است مثلاً برای $\xi = 0$ $\beta_0 = \sqrt{2}$

$1 < \beta_0 < \sqrt{2}$



گزینه ۴ * وقتی بار سریع تغییر کند یعنی $\beta \to \infty$ بنابراین $D \to 0$ گزینه ۴ غلط است.

۲۴- در کدام سیستم جابه‌جایی نهایی سازه تک درجه آزادی (پس از مدت طولانی) تحت ارتعاش آزاد الزاماً صفر است؟

۱) با سختی غیرخطی
۲) با میرایی کولمب
✓ ۳) با میرایی ویسکوز
۴) نامیرا

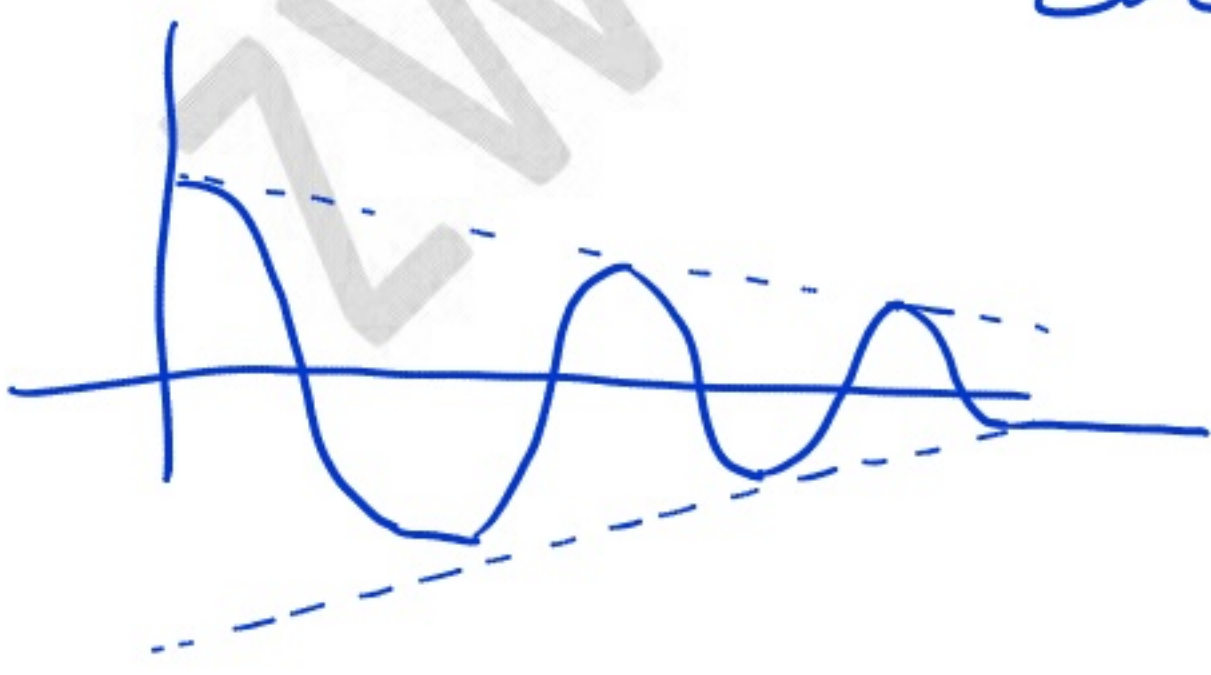
* در سیستم های با میرائی ویسکوز پاسخ ارتعاش آزاد در بی نهایت صفر خواهد شد.

میرائی ویسکوز

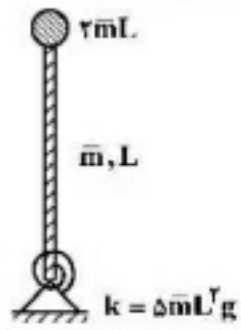
* در حالت نامیرا پاسخ ماندگار خواهد داشت

* در حالت میرائی کولمب پاسخ نهائی در همگرای کمتر از $\frac{F_f}{K}$ خواهد بود.

F_f نیروی اصطکاک است



۲۵- فرکانس زاویه‌ای طبیعی سازه زیر چقدر است؟ ($\bar{m}$ جرم واحد طول میله است و میله صلب فرض شده است.)



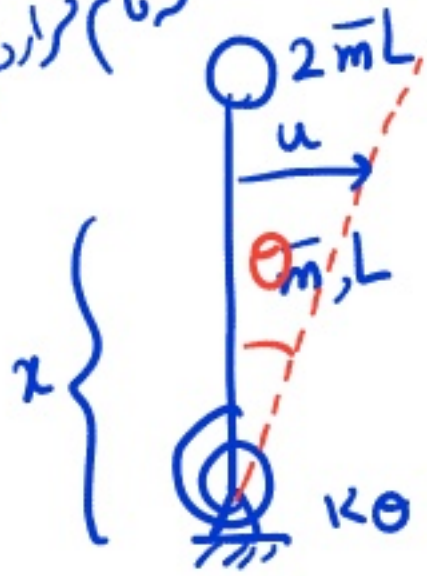
۱) $\sqrt{\frac{۲۴}{۲۵}\frac{g}{L}}$

۲) $\sqrt{\frac{۱۵}{۱۴}\frac{g}{L}}$ ✓

۳) $\sqrt{\frac{۶}{۷}\frac{g}{L}}$

۴) $\sqrt{\frac{۶}{۵}\frac{g}{L}}$

باید در صورت سوال گفته می‌شد که در صفحه قائم قرار دارد یا نه



$u(x,t) = \varphi(x)\, Z(t)$

$Z(t) \equiv \theta(t) \longrightarrow \varphi(x) = x$

$K_\theta = 5\bar{m}L^2 g$

$K^* = K_s^* - K_G^* = 5\bar{m}L^2 g - \frac{5}{2}\bar{m}gL^2 = \frac{5}{2}\bar{m}L^2 g$

سختی سازه‌ای $K_s^* = K_\theta\, \varphi'(0)^2 = 5\bar{m}L^2 g \times 1 = 5\bar{m}L^2 g$

هندسی " $K_G^* = \int_0^L N(x)\, \varphi'(x)^2 dx$

نیروی محوری ناشی از وزن تیر و جرم متمرکز انتهای تیر

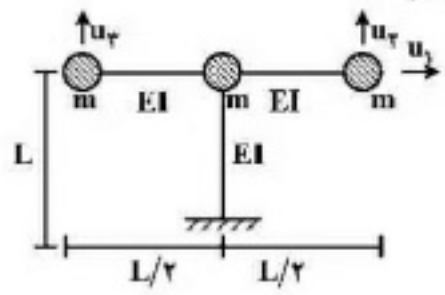
$K_G^* = \int_0^L (3\bar{m}Lg - \bar{m}g\,x) \times 1^2\, dx$

$= 3\bar{m}L^2 g - \frac{mg}{2} \times L^2 = \frac{5}{2}\bar{m}gL^2$

$m^* = I_0\, \varphi'(0)^2 + 2\bar{m}L\, \varphi(L)^2 = \frac{\bar{m}L^3}{3} \times 1^2 + 2\bar{m}L \times L^2 = \frac{7}{3}\bar{m}L^3$

$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{m^*}} = \sqrt{\frac{5/2\ \bar{m}L^2 g}{7/3\ \bar{m}L^3}} = \sqrt{\frac{15}{14}\frac{g}{L}}$

۲۶- سازه سه درجه آزادی مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید. کدام گزینه می‌تواند یکی از بردارهای مربوط به شکل مود ارتعاشی سازه باشد؟ (از تغییر شکل محوری اعضا صرف‌نظر شده است.)

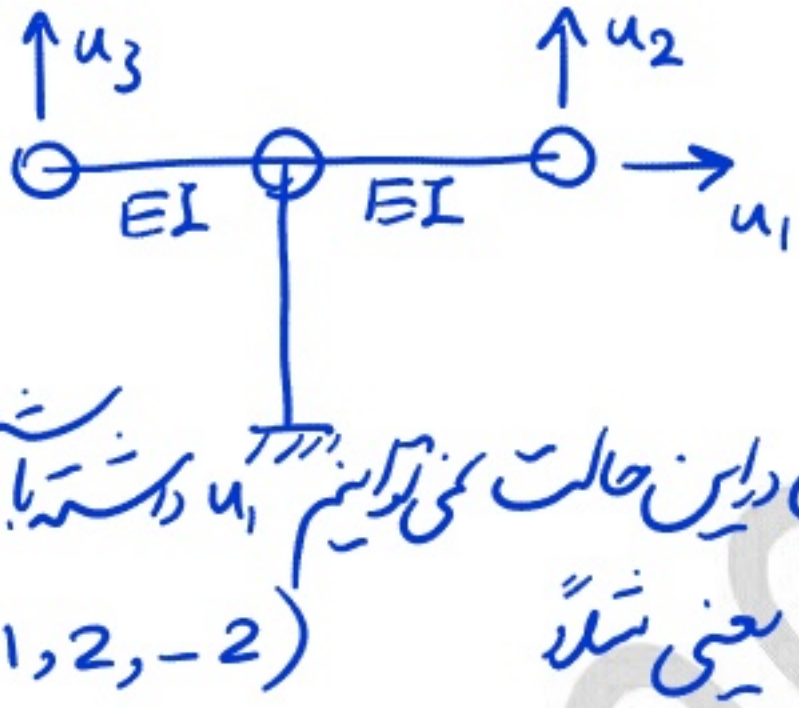


۱) $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۲ \\ ۲ \end{bmatrix}$ ✓

۲) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$



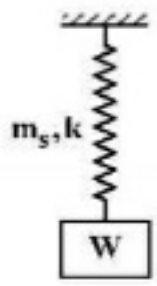
چون سازه متقارن است یکی از مودهای ارتعاشی آن نسبت به محور تقارن باید متقارن باشد!

پس گزینه (۱) درست است! چون در این حالت می‌آییم u_1 داشته باشیم (1, 2, -2)

یک مود دیگر باید پادمتقارن باشد! یعنی مثلاً که هیچ گزینه‌ای به این شکل نیست.

ZWad

۲۷- در سیستم زیر اگر جرم فنر m_s باشد، فرکانس زاویه‌ای طبیعی سیستم چقدر است؟ $(\omega_n = ?)$

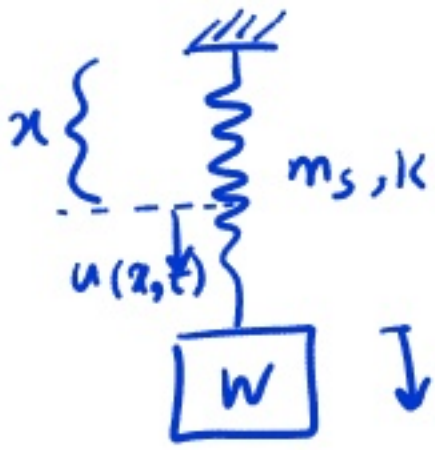


۱) $\sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + m_s}}$

۲) $\sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{۱}{۲} m_s}}$

۳) $\sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{۱}{۳} m_s}}$ ✓

۴) $\sqrt{\frac{k}{\frac{W}{g} + \frac{۱}{۱۲} m_s}}$



$u(x,t) = \varphi(x)\, Z(t)$

$\varphi(x) = \frac{x}{L}$ ← طول فنر

طبق روش رایلی داریم

$E_{k\,max} = E_{s\,max}$

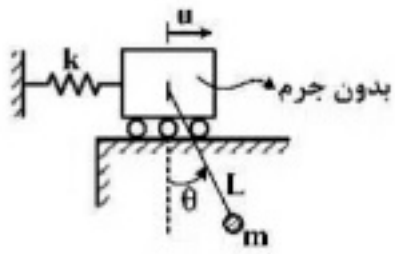
$E_{s\,max} = \frac{1}{2} K Z_{max}^2$

$E_{k\,max} = \left(\int_0^L \frac{m_s}{L} \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx\right) \times \frac{1}{2} Z_{max}^2 \omega^2 + \frac{W}{2g} \times Z_{max}^2 \omega^2$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{\frac{m_s}{3} + W/g}}$

گزینه ۳ درست است

۲۸- جرم m با کابلی به طول L مطابق شکل به سیستم در نظر گرفته شده متصل است. می‌دانیم که کابل خاصیت ارتجاعی ندارد. فرکانس طبیعی سیستم در ارتعاش آزاد کدام است؟

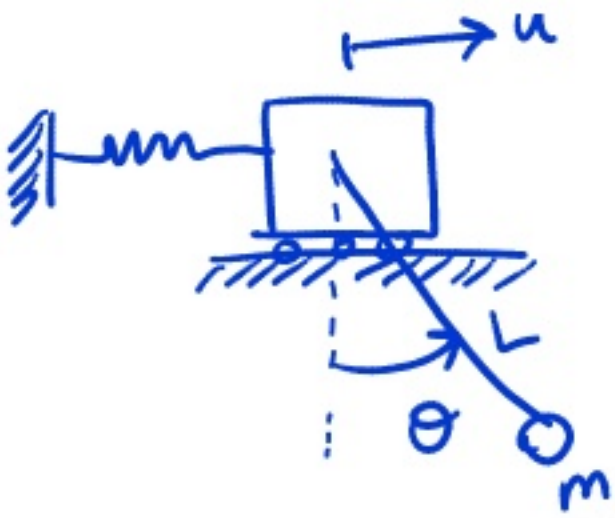


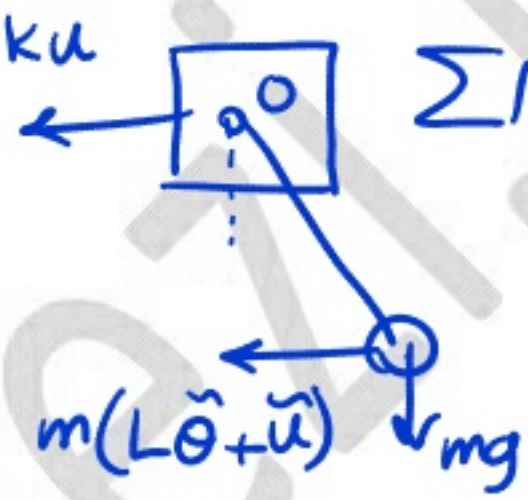
۱) $\sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{k}}}$ ✓

۲) $\sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{3k}}}$

۳) $\sqrt{\frac{g}{\frac{L}{3}+\frac{mg}{k}}}$

۴) $\sqrt{\frac{g}{\frac{2L}{3}+\frac{mg}{k}}}$





$\sum M_O = 0 \rightarrow$

$mgL\theta + mL(L\ddot{\theta}+\ddot{u}) = 0$ (1)

$\sum F_x = 0 \rightarrow m(L\ddot{\theta}+\ddot{u}) + ku = 0 \rightarrow$

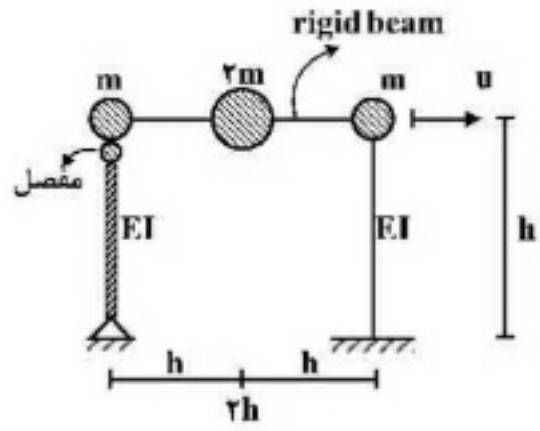
$-mg\theta + ku = 0 \rightarrow \boxed{u = +\frac{mg\theta}{k}}$ (2)

$m(L\ddot{\theta} + \frac{mg}{k}\ddot{\theta}) + mg\theta = 0 \rightarrow$

$(L + \frac{mg}{k})\ddot{\theta} + g\theta = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L+\frac{mg}{k}}}$

گزینه ۱ درست است

۲۹- زمان تناوب مود اول قاب نمایش داده شده کدام است؟

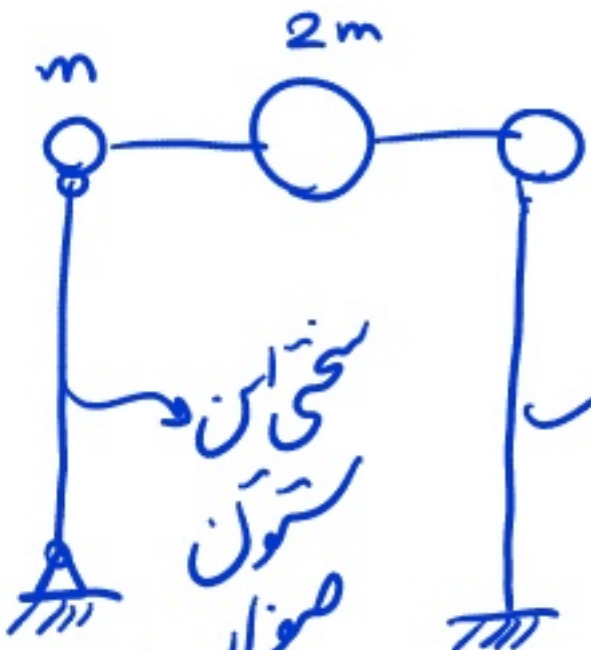


۱) $۲\pi\sqrt{\frac{mh^۳}{۳EI}}$ ✓

۲) $۲\pi\sqrt{\frac{۴mh^۳}{۳EI}}$

۳) $۲\pi\sqrt{\frac{mh^۳}{۶EI}}$

۴) $۲\pi\sqrt{\frac{۴mh^۳}{۱۵EI}}$



سختی این ستون صفر است

$K_c = \frac{12EI}{h^3}$ چون درجات آزادی ستون در بالا در دو راستا مقید هستند.

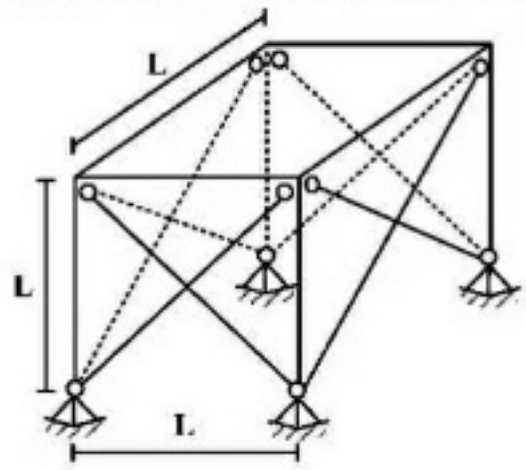
البته سوال باید دقیق گفته می‌شد که از تغییر طول محوری اعضا صرف نظر می‌شود. در ضمن این سازه یک درجه آزادی است پس یک نوسانگر تک درجه آزادی است.

$K^*_{eff} = 12EI/h^3$ $\quad m^* = 4m$

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*_{eff}}{m^*}} \longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{K^*_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{12EI/h^3}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mh^3}{3EI}}}$$

۳۰- فرکانس ساختمان یک طبقه برشی زیر که در دو امتداد دارای بادبند می‌باشد، کدام است؟ سطح مقطع بادبندها (هر بادبند) برابر A بوده و از سختی ستون‌ها در تحمل نیروهای جانبی صرف‌نظر شود. جرم کل طبقه برابر m و مدول الاستیسیته مصالح برابر با E می‌باشد.



۱) $\sqrt{\frac{AE}{\sqrt{2}mL}}$

۲) ✓ $\sqrt{\frac{\sqrt{2}AE}{mL}}$

۳) $\sqrt{\frac{2AE}{mL}}$

۴) $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}AE}{mL}}$

صورت سوال باید تصریح می‌کرد که بادبندی‌ها می‌توانند در فشار عمل کنند یا نه!
این سازه دارای ۳ درجه آزادی است البته اگر کف سازه صلب باشد
بنابراین ۳۰ فرکانس طبیعی هم خواهد داشت. ولی از روی سادگی کار طراح می‌شود فرض کرد فقط در یک راستا فرکانس طبیعی را می‌خواهیم حساب کنیم.

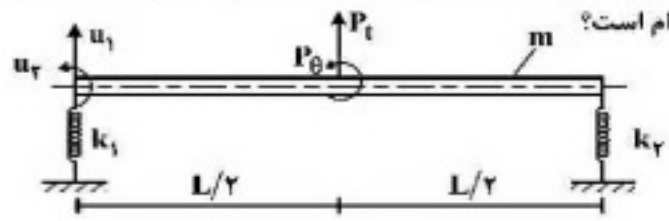
$$K^* = 4K_{bracing} = \frac{4EA}{2\sqrt{2}L} = \frac{\sqrt{2}EA}{L}$$

$$K_{bracing} = \frac{EA}{L\sqrt{2}}\cos^2\theta = \frac{EA}{L\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{EA}{2\sqrt{2}L}$$

اگر بادبندی‌ها هم در کشش هم فشار از خود عکس العمل نشان دهند ۴ بادبند در هر راستا خواهیم داشت.

$$\omega = \sqrt{\frac{K^*}{m}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}EA}{Lm}}$$

۳۱- یک میله صلب بکنواخت به جرم کل m در دو انتها توسط دو فنر به سختی‌های k_1 و k_2 نگهداری می‌شود وتحت اثر نیروی دینامیکی مطابق شکل قرار دارد. میله طوری مقید شده است که در امتداد قائم فقط در صفحهٔ قائم می‌تواند حرکت نماید. ماتریس جرم این سیستم کدام است؟



۱) $\begin{bmatrix} m & mL \\ mL & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} m & \frac{mL}{2} \\ \frac{mL}{2} & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix}$

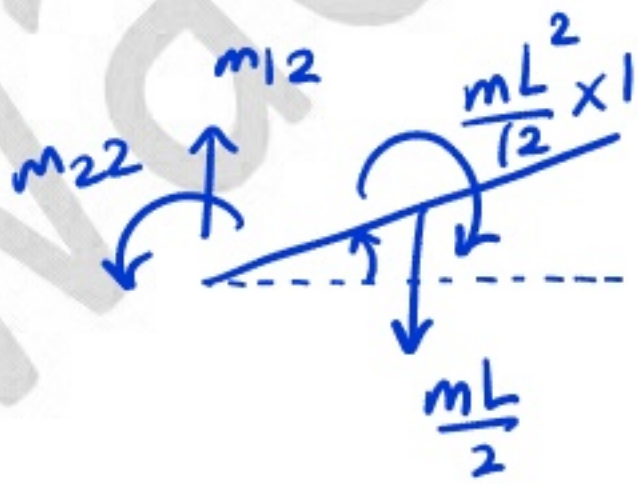
۳) $\begin{bmatrix} m & mL \\ mL & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} m & \frac{mL}{2} \\ \frac{mL}{2} & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$ ✓

$\tilde{u}_1 = 1$

$\tilde{u}_2 = 0$

$$\begin{cases} m_{11} = m \\ m_{21} = mL/2 \end{cases}$$



$\tilde{u}_1 = 0$

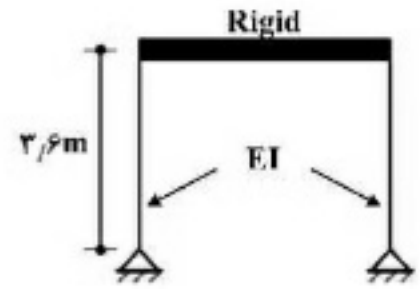
$\tilde{u}_2 = 1$

$$\begin{cases} m_{22} = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} \\ m_{22} = \frac{mL^2}{3} \end{cases}$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m & \frac{mL}{2} \\ \frac{mL}{2} & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}$$

گزینهٔ درست است

۳۲- یک ساختمان یک طبقه دارای پریود ۰٫۴s می‌باشد. این قاب تحت اثر بار ضربه‌ای مستطیلی با مقدار ۱٫۵ton و با مدت زمان اثر ۰٫۱s قرار می‌گیرد. اگر ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی برای بار ضربه‌ای داده شده برابر $R_d = \sqrt{2}$ باشد، مقدار حداکثر لنگر خمشی ستون چند تن ـ متر (ton.m) است؟



ستون $I = 2576cm^4$, $E = 2{,}1\times10^6 \frac{kg}{cm^2}$

۱) ۱٫۰۶
۲) ۲٫۱۲
۳) ۳٫۸۲ ✓
۴) ۷٫۶۴

حداکثر جابجایی دینامیکی سازه برابر است با:

$$u_{max}^{Dyn} = u_{max}^{Static} \times DAF$$

$$u_{max}^{Dyn} = \frac{P_0}{k} \times \sqrt{2} = \frac{1.5}{k} \times \sqrt{2}$$

$2k_c$ = سختی کل سازه ← k

حداکثر برش هر ستون

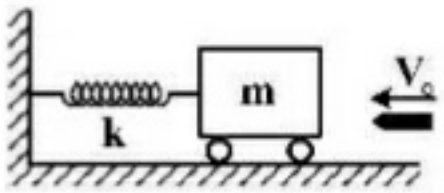
$$f_{smax} = k_c \times u_{max}^{Dyn} = \frac{k}{2} \times \frac{1.5\sqrt{2}}{k} = 0.75\sqrt{2} \text{ ton}$$

سختی هر ستون

$$M = f_{smax} \times h = 0.75\sqrt{2} \times 3.6 = 3.82 \text{ ton.m}$$

جواب گزینه ۳ است

۳۳- جرم قطعهٔ چوبی مطابق شکل، برابر $m = ۴۸m_۰$ و سختی فنر برابر k می‌باشد. گلوله‌ای به وزن $m_۰$ با سرعت $v_۰$ به سوی بلوک شلیک و در بلوک فرو می‌رود. پاسخ $u(t)$ بلوک کدام است؟



۱) $\sqrt{\frac{m_۰}{k}}\frac{v_۰}{\sqrt{۴۸}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\frac{t}{\sqrt{۴۸}}\right)$

۲) $\sqrt{\frac{m_۰}{k}}\frac{v_۰}{۷}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\frac{t}{۷}\right)$

۳) $\sqrt{\frac{m_۰}{k}}\frac{v_۰}{\sqrt{۴۸}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\frac{t}{\sqrt{۴۸}}\right)$

۴) ✓ $\sqrt{\frac{m_۰}{k}}\frac{v_۰}{۷}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\frac{t}{۷}\right)$

ابتدا از پایستگی تکانه خطی داریم:

$m_۰v_۰ = (m+m_۰)V'$ ← سرعت سیستم بعد از برخورد

$V' = V_۰ \times \frac{۱}{۴۹}$

$u(t) = u_۰\cos\omega t + \frac{\dot{u}_۰}{\omega}\sin\omega t$

$\dot{u}_۰ = V' = \frac{V_۰}{۴۹}$

$u(t) = \frac{V_۰/۴۹}{۱/۷\sqrt{\frac{k}{m_۰}}}\sin\left(\frac{۱}{۷}\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\,t\right)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+m_۰}} = \frac{۱}{۷}\sqrt{\frac{k}{m_۰}}$

$= \frac{۱}{۷}V_۰\sqrt{\frac{m_۰}{k}}\sin\left(\frac{۱}{۷}\sqrt{\frac{k}{m_۰}}\,t\right)$

گزینهٔ ۴ صحیح است.