پاسخ تشریحی

الاستیسیته – دکتری ۹۹

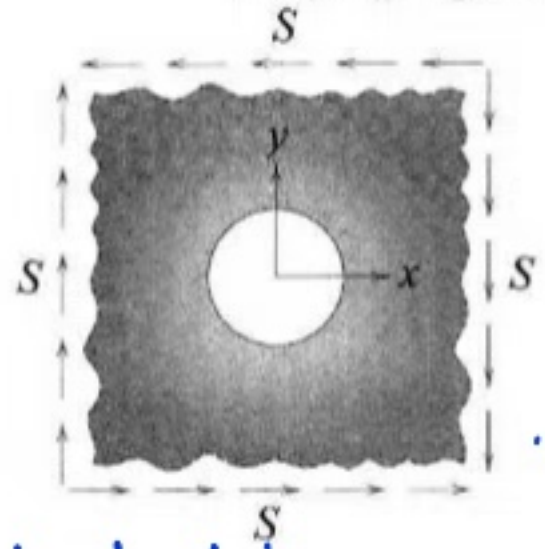
دکتر واعظی

@Dr_Zarfam

۳۲- می‌دانیم که تابع تنش Airy متعلق به مسئله‌ی یک صفحه‌ی نامتناهی دارای حفره‌ی دایروی تحت کشش تک محوری به بزرگی T درراستای محور x به شرح زیر است؟

$$\phi = T(a_1 \ln r + a_2 r^2 + \left[a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right]\cos 2\theta)$$

که در اینجا $\{a_1 ..... a_5\}$ ثوابتی برحسب شعاع حفره هستند. حال تابع تنش Airy متعلق به مسئله‌ی همین صفحه‌ی نامتناهی دارای حفره‌ی دایروی را تحت اثر برش یکنواخت S مطابق شکل کدام است؟



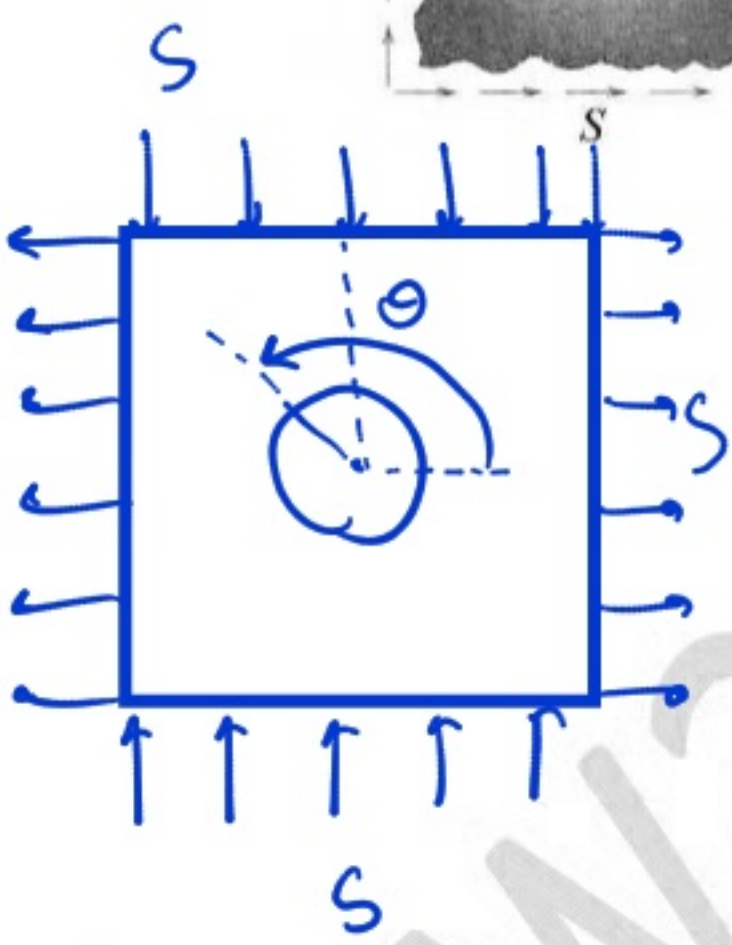
۱) $-2S\left[a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right]\sin 2\theta$

۲) $-2S\left[a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right]\cos 2\theta$

۳) $2S\left[a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right]\sin 2\theta$ ✓

۴) $2S\left[a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right]\cos 2\theta$

جواب کلید سوالات سازمان سنجش غلط است.



$\varphi^* = \varphi(r,\theta) - \varphi(r,\theta-\pi/2) \longrightarrow$ برای شکل چپی

$\tilde{\varphi} = \varphi(r,\theta-\pi/4) - \varphi(r,\theta-3\pi/4) \longrightarrow$ برای شکل راستی

$= S\left(a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right)\left\{\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(2\theta-\frac{3\pi}{2}\right)\right\}$

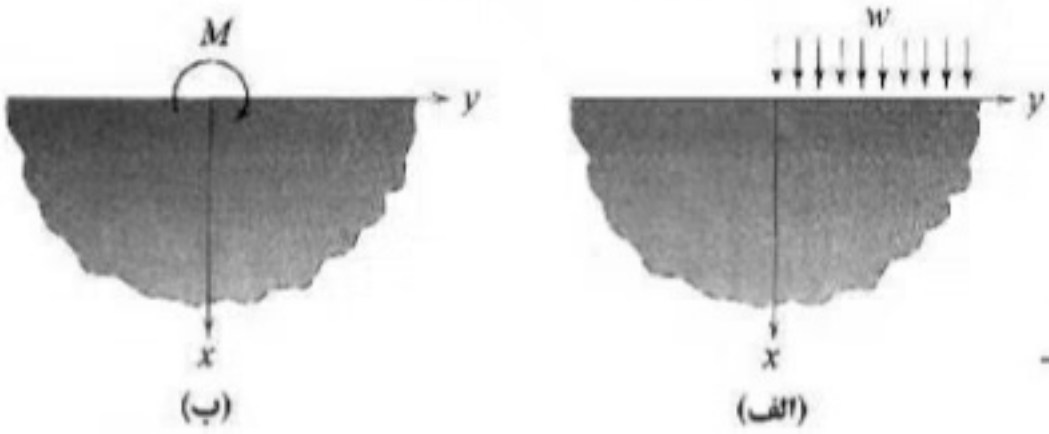
$= S\left(a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right)\left\{\sin 2\theta + \sin 2\theta\right\}$

$= 2S\left(a_3 r^2 + a_4 r^{-2} + a_5\right)\sin 2\theta$

۳۵- نیم فضای نامتناهی $x \geq 0$ را درنظر بگیرید. باری گسترده و یکنواخت به شدت w بر روی نقاط مرزی $\{(x,y)|x=0 \ , y \geq 0\}$ مطابق شکل (الف)وارد می‌شود. تابع تنش Airy متعلق به این مسئله‌ی به شرح زیر است:

$$\phi = -\frac{w}{2\pi}(x^2+y^2)\left[\tan^{-1}(\frac{y}{x})+\frac{\pi}{2}\right]-\frac{w}{2\pi}xy$$

حال همین نیم فضای نامتناهی را مجددا در نظر بگیرید به شرطی که تنها بار خارجی وارد بر آن یک لنگر متمرکز باشد که مطابق شکل (ب)در مبدأمختصات اثر می‌کند. تابع تنش این مسئله کدام است؟

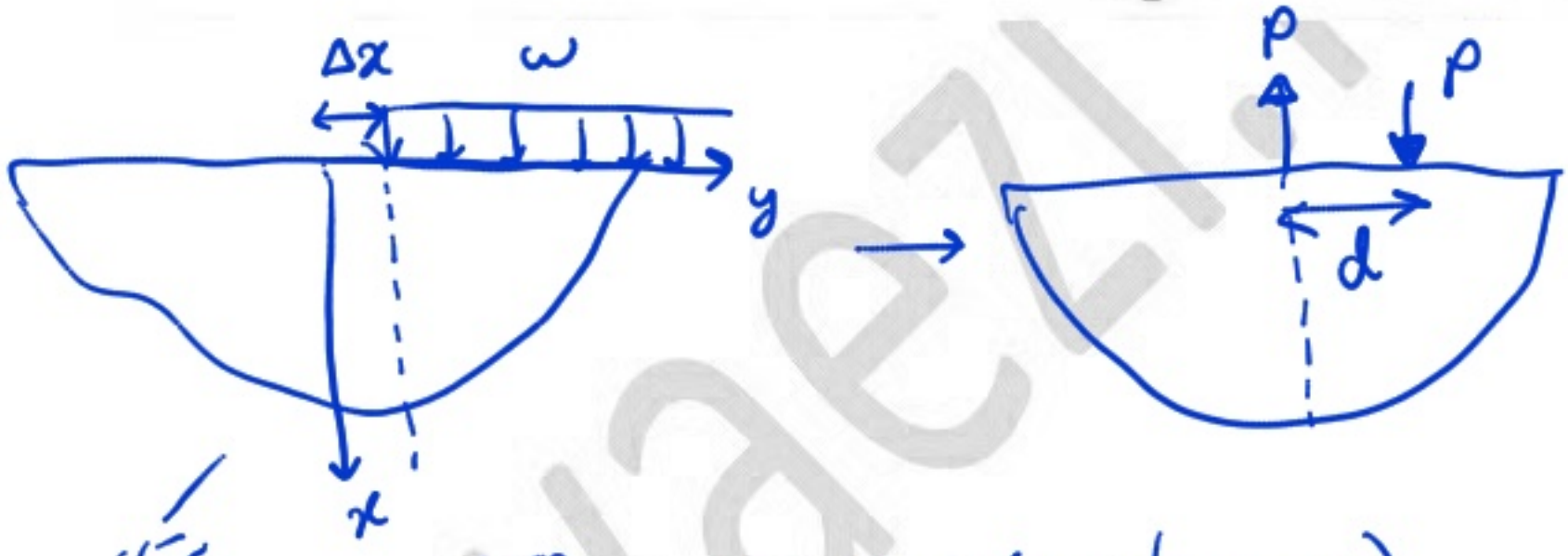


۱) $-\frac{M}{2\pi}\left[\frac{2xy}{x^2+y^2}+2\tan^{-1}(\frac{y}{x})\right]$

۲) $\frac{M}{2\pi}\left[\frac{2xy}{x^2+y^2}+2\tan^{-1}(\frac{y}{x})\right]$ ✓

۳) $-\frac{M}{2\pi}\left[2x+\pi y+2y+2\tan^{-1}(\frac{y}{x})\right]$

۴) $\frac{M}{2\pi}\left[2x+\pi y+2y+2\tan^{-1}(\frac{y}{x})\right]$



φ_1 بار نقطه‌ای متمرکز در $x=0$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-w}{2\pi}(2y)\left(+\tan^{-1}\frac{y}{x}+\frac{\pi}{2}\right)\cdots$$

$$\cdots - \frac{w}{2\pi}(x^2+y^2)\frac{1/x}{1+y^2/x^2} - \frac{w}{2\pi}x$$

$$\varphi_1 = -\frac{P}{2\pi}\left\{2y\tan^{-1}\frac{y}{x}+y\pi+2x\right\}$$

φ_{2d} بار نقطه‌ای متمرکز رو به بالا در فاصله d

$$= -\varphi_1(x, y-d)$$

$$\varphi_1 = -\frac{P}{2\pi}\left\{2y\tan^{-1}\frac{y}{x} + y\pi + 2x\right\}$$

$$\varphi_3 = -\varphi_1(x,y) + \varphi_1(x,y-d) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}d$$

$$\varphi_3 = +\frac{Pd}{2\pi}\left\{2\tan^{-1}y/x + 2y\frac{\frac{1}{x}}{1+y^2/x^2} + \pi\right\}$$

$$= +\frac{M}{2\pi}\left\{2\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2} + \pi\right\}$$

$$\varphi_3 = \frac{M}{2\pi}\left\{2\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{2xy}{x^2+y^2}\right\}$$

عبارت ثابت را می‌توان حذف نمود چون مشتق آن را صفر می‌کند.

۳۶- در معیار Von Mises، شعاع استوانه(r) مربوط به سطح تسلیم کدام است؟(تنش تسلیم مصالح σ_y می‌باشد.)

۱) $\sqrt{\frac{۱}{۳}}\sigma_y$

۲) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\sigma_y$ ✓

۳) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}\sigma_y$

۴) $\sqrt{۳}\sigma_y$

معیار فون مایسز برابر است با:

$$J_2 = k^2$$

$$k^2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2 = \frac{1}{3}(\sigma_y+0+0)^2 - 0^2 = \frac{1}{3}\sigma_y^2$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_y$$

$$\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 = \frac{1}{3}\sigma_y^2 \longrightarrow \text{معادله استوانه}$$

شعاع استوانه $= \sqrt{2}\,k = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_y$

۳۷- در نقطه‌ای از یک جسم تنش‌های انحرافی اصلی به‌صورت $\sigma'_1 = 3$, $\sigma'_2 = 2$, $\sigma'_3 = -5$ محاسبه شده‌اند. اگر درایه‌های قطر اصلی ماتریس تنش کلی برابر $\sigma_{11} = 1/25$, $\sigma_{22} = 2/25$, $\sigma_{33} = 1$ باشد آنگاه تنش‌های اصلی σ_1, σ_2, σ_3 به‌ترتیب (از راست به چپ) کدام است؟

۱) $3/75$, $2/75$, $-2/75$

۲) $4/00$, $3/00$, $-3/00$

۳) $4/25$, $3/25$, $-3/25$

✓ ۴) $4/50$, $3/50$, $-3/50$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ تنش‌های اصلی

$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ تنش‌های اصلی انحرافی

$$\sigma'_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3}$$

$$\sigma_i = \sigma'_i + \frac{I_1}{3}$$

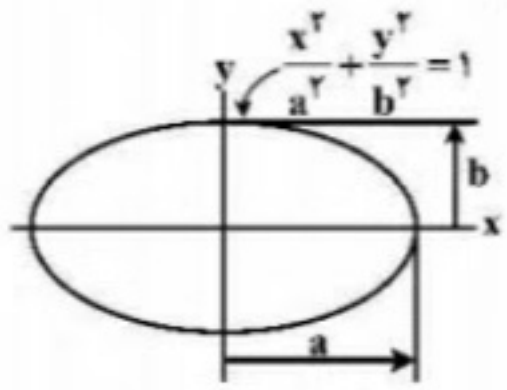
$$\sigma_1 = 3 + 1.5 = 4.5$$

$$\sigma_2 = 2 + 1.5 = 3.5$$

$$\sigma_3 = -5 + 1.5 = -3.5$$

۳۸- یک میلهٔ منشوری با سطح مقطع بیضی در دو انتهای آزاد تحت اثر کوپل پیچشی T قرار گرفته است. تابع تنش ϕ و محل وقوع تنش برشی حداکثر به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

(مدول برشی مصالح میله G و θ زاویه پیچش در واحد طول میله‌ی می‌باشد.)



۱) $\frac{-a^2b^2G\theta}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ ، انتهای قطر کوچک

۲) $\frac{-a^2b^2G\theta}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ ، انتهای قطر بزرگ

۳) ✓ $\frac{-a^2b^2G\theta}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ ، انتهای قطر کوچک

۴) $\frac{-a^2b^2G\theta}{a^2+b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$ ، انتهای قطر بزرگ

φ پیچشی باید روی مرز صفر باشد که همه گزینه‌ها این شرط را ارضا می‌کنند.

طبق اصل تشابه پوسته غشائی هر حالتی که شیب غشای ساخته شده روی مقطع در حال پیچش بیشتر باشد تنش برشی نیز بیشتر خواهد بود به همین دلیل تنش برشی در انتهای قطر کوچک بیشتر است.

در عین حال φ باید رابطه $\nabla^2\varphi=-2G\theta$ را ارضا کند.

(زاویه پیچش، مدول برشی)

پس

$$\varphi=\frac{-a^2b^2}{a^2+b^2}G\theta\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$$

۳۹- یک مسئله کرنش سطح در صفحه xy مفروض است. اگر مشخصات مکانیکی مصالح E و ν باشد، کرنش طولی ε_x کدام است؟

۱) $\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$ ✓

۲) $\frac{1-\nu}{E}\left[(1+\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y\right]$

۳) $\frac{1-\nu}{E}\left[(1+\nu)\sigma_x + \nu\sigma_y\right]$

۴) $\frac{1+\nu}{E}\left[(1-\nu)\sigma_x + \nu\sigma_y\right]$

$\varepsilon_z = 0 \rightarrow \sigma_z = \upsilon(\sigma_x + \sigma_y)$

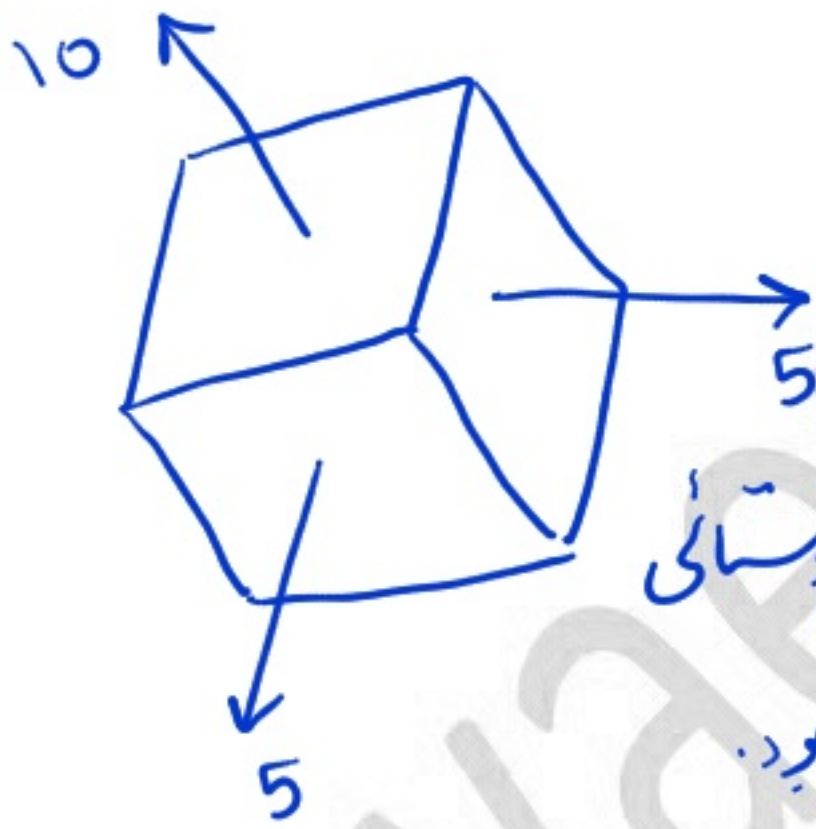
$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_x(1-\upsilon^2)}{E} - \frac{\upsilon(1+\upsilon)\sigma_y}{E}$

$= \frac{(1+\upsilon)}{E}\left\{\frac{\sigma_x}{E}(1-\upsilon) - \upsilon\frac{\sigma_y}{E}\right\}$

ZWad

۴۰- در یک نقطه از یک سازه تنش‌های اصلی به‌صورت $\sigma_1 = 10\,MPa, \sigma_2 = 5MPa, \sigma_3 = 5MPa$ است.کدام گزینه در مورد راستاهای اصلی تنش درست است؟

۱) سه راستای اصلی منحصر بفرد وجود دارد.
۲) دو راستای اصلی منحصر بفرد وجود دارد.
۳) یک راستای اصلی منحصر بفرد وجود دارد. ✓
۴) راستای اصلی منحصر بفرد وجود ندارد.



وقتی دو تنش اصلی برابر با صفر داریم یا سه تنش اصلی برابر با هم باشند یعنی جهت اصلی منحصر به فرد خواهیم داشت و هر راستایی که عمود بر آن نیز جهت اصلی خواهد بود.

ZWad

۴۱- کدام گزینه در مورد صفحات برشی اصلی و صفحات اصلی درست است؟

۱) صفحات اصلی بر صفحات برش اصلی عمود هستند.
۲) روی صفحات برش اصلی، تنش نرمال برابر صفر است.
✓ ۳) روی صفحات اصلی، تنش برشی صفر است.
۴) صفحات اصلی بر صفحات برشی غیراصلی عمود هستند.

صفحات اصلی صفحاتی هستند که روی آنها برش صفر است.

صفحات برش اصلی صفحاتی هستند که روی آنها برش حداکثر باشد

صفحات برش اصلی از دوران جهت اصلی به اندازه 45° حول جهت اصلی سوم به دست می‌آید

ZWad

۴۲- در نقطه A به مختصات (۱- و ۱ و۱) درون یک جسم بارگذاری شده، وضعیت تنش تک محوره به شدت ۳MPa در امتداد خط $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=z+1$ برقرار است. تنش نرمال روی صفحه $x+y+z=1$ گذرنده ازاین نقطه چند مگاپاسکال است؟

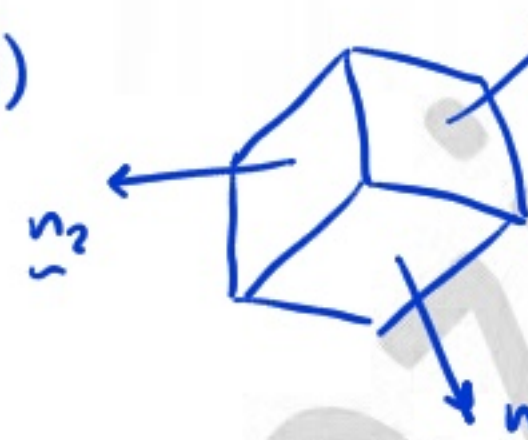
۱) ۱

۲) $\frac{5}{\sqrt{3}}$

۳) $\frac{8}{3}$

۴) $\frac{25}{9}$ ✓

$\underset{\sim}{n}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$



$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

وضعیت تانسور تنش در دستگاه $n_3\ n_2\ n_1$

$\{T'\} = [\sigma']\{n'\} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{Bmatrix}$

بردار نرمال صفحه در دستگاه $n_3\ n_2\ n_1$

$= n'_1 \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{5}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

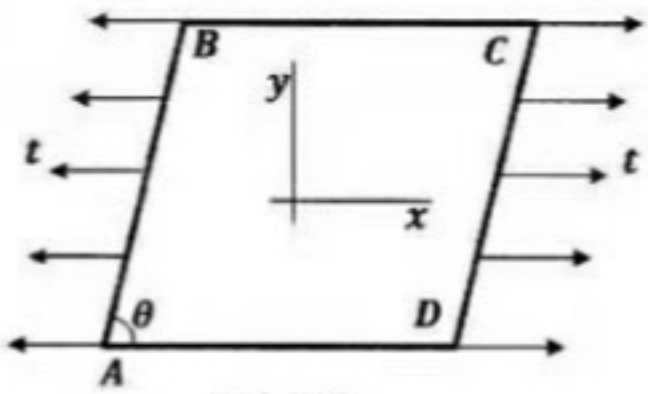
$n'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \cdot \frac{1}{3}(2,2,1) = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

مولفه بردار نرمال صفحه در راستای n_1

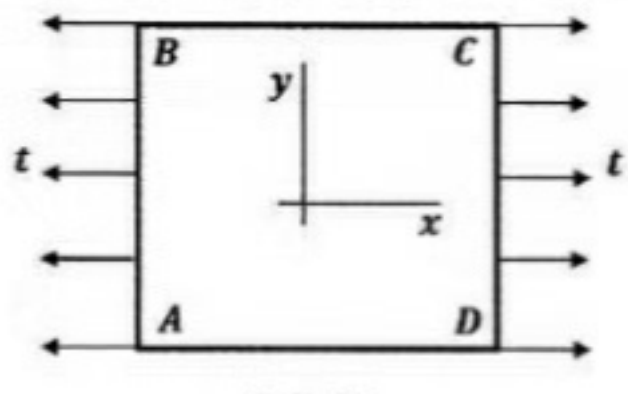
$N = \underset{\sim}{n}_1 \cdot \underset{\sim}{T}' = \frac{5}{\sqrt{3}}(1,0,0) \cdot \left(\frac{5}{3\sqrt{3}}, n'_2, n'_3\right)$

$= 25/9$

۴۳- اضلاع AB وCD در هر دو شکل زیر تحت نیروی گسترده خطی با شدت t قرار گرفته اند. مقایسه صحیح مقادیر و راستاهای اصلی تنش درون صفحه xy مربوط به این دو شکل کدام است؟



شکل (b)



شکل (a)

۱) راستاها و مقادیر اصلی تنش در هر دو شکل یکسان هستند.

۲) یکی از راستاهای اصلی تنش و یکی از مقادیر اصلی تنش در دوشکل متفاوت‌اند.

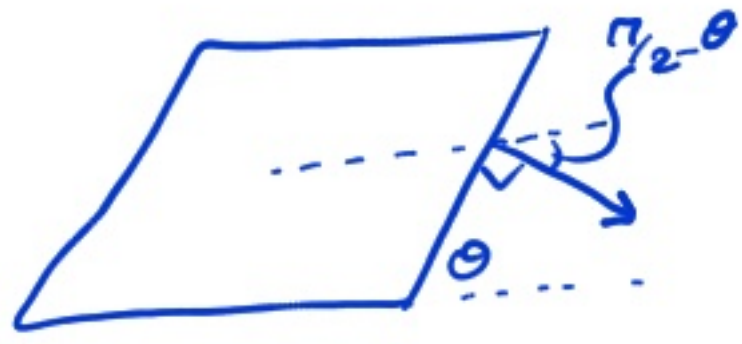
۳) یکی از راستاهای اصلی تنش در دو شکل متفاوت است ولی مقادیر اصلی تنش در دوشکل برابرند.

۴) راستاهای اصلی تنش در هر دو شکل یکسان است ولی یکی از مقادیر اصلی تنش در دو شکل متفاوت است. ✓

در شکل راست جهات اصلی x و y بود و مقادیر اصلی t و ۰ است

و در شکل چپ یکی از جهات اصلی y بود و مقدار اصلی متناظر آن ۰ است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \\ 0 \end{Bmatrix}$$



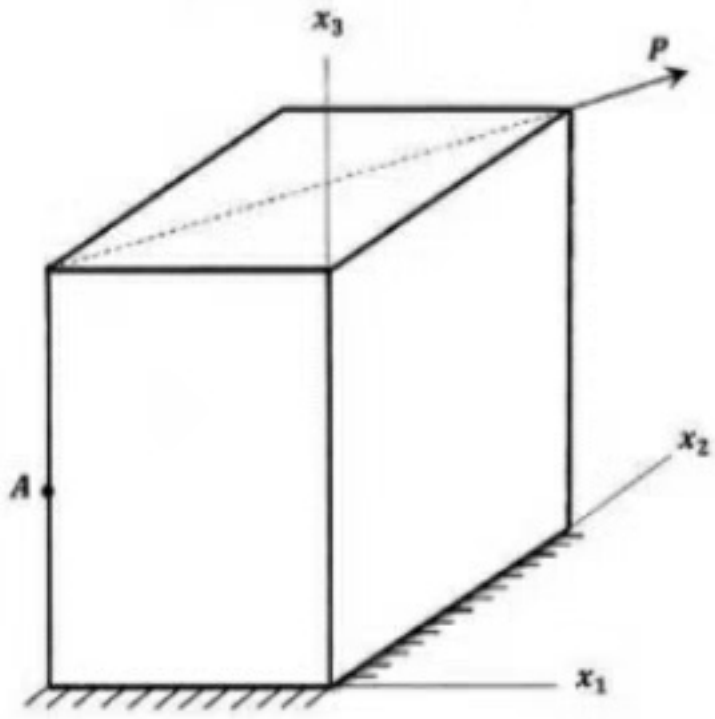
$\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$ ⟶

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t \\ 0 \end{Bmatrix} \longrightarrow \sigma_x = \frac{t}{\sin\theta}$$

بنابراین وضعیت تنش یک محوره است و بازیکی از مقادیر اصلی

و دیگری $\frac{t}{\sin\theta}$ است و در جهت x و y جهات اصلی هستند.

۴۴- قطعه منشوری نشان داده شده در شکل زیر از جنس مصالح الاستیک همسانگرد ساخته شده است. این قطعه در وجه تحتانی به صورت کاملا گیردار به زمین متصل شده است. اگر ε_{ij} مؤلفه‌های کرنش در نقطه A باشند، کدام گزاره صحیح است؟



۱) $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$

۲) $\varepsilon_{12} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} = 0$ ✓

۳) $\varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} = 0$

۴) $\det[\varepsilon_{ij}] = 0$

در نقطه A در سطح آزاد قرار دارد

$\tau_{12} = \tau_{21} = 0 \rightarrow \varepsilon_{12} = 0$

$\sigma_{11} = 0 \rightarrow \varepsilon_{11} = -\frac{\upsilon \sigma_{33}}{E}$

$\sigma_{22} = 0 \rightarrow \varepsilon_{22} = -\frac{\upsilon \sigma_{33}}{E}$

$\tau_{23} = 0 \rightarrow \varepsilon_{23} = 0$

$\tau_{13} = 0 \rightarrow \varepsilon_{13} = 0$

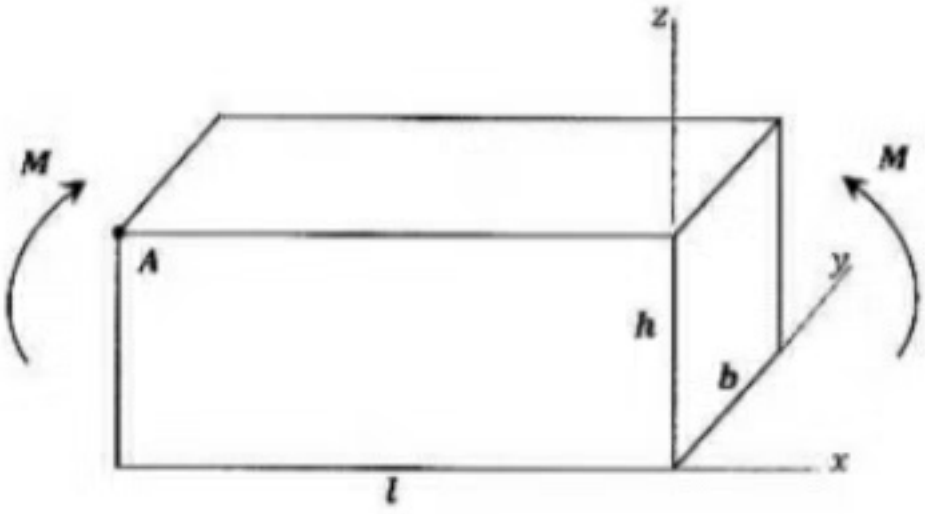
$\varepsilon_{33} = \sigma_{33}/E$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} -\upsilon\sigma_{33}/E & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\upsilon\sigma_{33}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{33}}{E} \end{bmatrix} \rightarrow \det \varepsilon_{ij} \neq 0$$

$\varepsilon_{ii} \neq 0$

گزینه ۲ درست است.

۴۵- با فرض تیر برنولی برای تیر نشان داده شده در شکل زیر به طول ℓ، عرض مقطع **b** وعمق **h** تحت خمش خالص **M**، تنش برشی هشت وجهی در نقطه **A** واقع در گوشه تیر کدام است؟



۱) $2\sqrt{2}\frac{M}{bh^2}$

۲) $2\frac{M}{bh^3}$

۳) $2\sqrt{6}\frac{M}{bh^2}$

۴) ۰

$$\sigma_x = \frac{Mz}{I} = \frac{M \times h_2}{\frac{1}{12}bh^3} = \frac{6M}{bh^2}$$

سطح آزاد تنش

$\sigma_y = 0$ →

$\sigma_z = 0$ →

$\tau_{xy} = 0$ →

$\tau_{xz} = 0$ →

$\tau_{yz} = 0$ →

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\sigma_1^2 + \sigma_1^2 + 0\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \times \frac{6M}{bh^2} = \frac{2\sqrt{2}M}{bh^2}$$