پاسخ تشریحی

مقاومت مصالح و تحلیل سازه

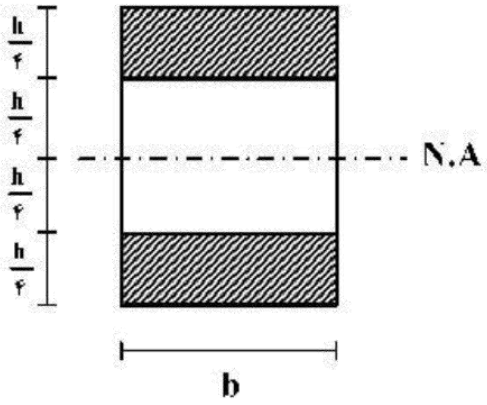
آزمون ارشد ۱۴۰۰

Instagram: Dr_Zarfam

کانال تلگرامی:

@Dr_Zarfam

۴۶ مقطع مستطیلی زیر تحت لنگر خمشی M قرار دارد. مقطع از یک جنس ماده ساخته شده است. چه کسری از لنگر خمشی توسط نواحی هاشورخورده تحمل می‌شود؟



۱) $\frac{۱۵}{۱۶}$
۲) $\frac{۷}{۸}$
۳) $\frac{۳}{۴}$
۴) $\frac{۱}{۲}$

گزینه (۲) ـ ساره

سهم لنگر خمشی تحمل شده توسط قسمت‌های هاشورخورده از رابطه زیر برای مقطع هنگی دارای تنش به دست می‌آید:

$$M_{\text{هاشور}} = \frac{I_{\text{هاشور}}}{I_{\text{کل}}} \times M$$

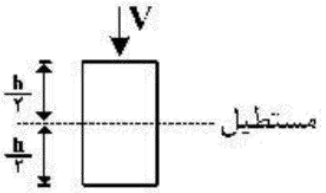
$$I_{\text{هاشور}} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b(h/2)^3}{12} = 7/8 \frac{bh^3}{12}$$

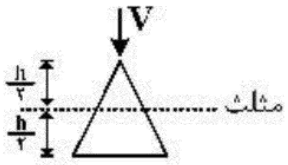
$$I_{\text{کل}} = \frac{bh^3}{12}$$

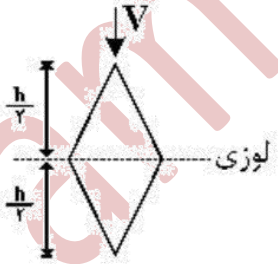
$$\Rightarrow M_{\text{هاشور}} = 7/8\, M$$

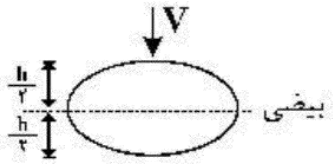
@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam

۴۷- در کدام‌یک از مقاطع زیر، تنش برشی ماکزیمم حاصل از نیروی برشی V در وسط ارتفاع مقطع پدید نمی‌آید؟

۱) 

۲) 

۳) 

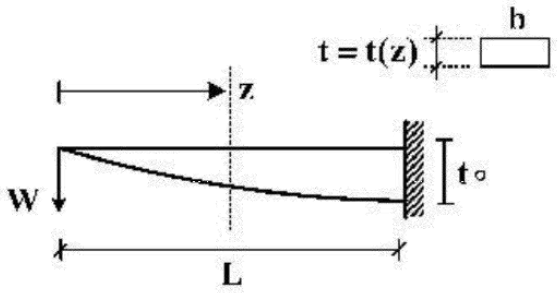
۴) 

گزینه ۳ صحیح است

در مقاطع مستطیل، مثلث و بیضی حداکثر تنش برشی ناشی از نیروی برشی V در وسط مقطع اتفاق می‌افتد در حالی که در مقطع لوزی به فاصله (h/۸) از بالا و پایین مقطع یعنی در دو نقطه، حداکثر تنش برشی ناشی از V را داریم.

@Dr_Zarfam

۴۸- یک تیر کنسولی به طول L دارای پهنای ثابت b و ضخامت متغیر t مطابق شکل زیر است. تغییرات t به‌گونه‌ای است که هنگامی که بار W در انتهای کنسول وارد می‌شود، خط میانی تیر (گذرنده از مرکز سطح مقطع) به شکل یک قوس از دایره در می‌آید. تابع تغییرات ارتفاع تیر $t(z)$ برابر کدام است؟ (z از انتهای آزاد کنسول اندازه گرفته می‌شود و ضخامت در $z=L$ برابر با t_0 است)



۱) $t(z)=t_0\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$

۲) $t(z)=t_0\left(\frac{z}{L}\right)$

۳) $t(z)=t_0$

۴) $t(z)=t_0\left(\frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$

گزینه (۱) ـ متوسط

با توجه به اینکه تغییر شکل ضخی تیر به صورت کمانی از دایره‌ی با شعاع ρ

$$\rho=\frac{EI}{M}\Rightarrow\frac{EI(z)}{M(z)}=cte$$

دایره ↓ ثابت

$$I(z)=\frac{b\,t^3(z)}{12}\quad \& \quad M(z)=W\times z$$

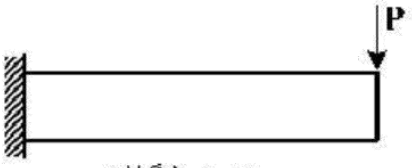
$$\Rightarrow\frac{t^3(z)}{z}=cte\Rightarrow t^3(z)=az \quad (*)$$

$$z=l \rightsquigarrow t=t_0 \Rightarrow t_0^3=al\Rightarrow a=t_0^3/l$$

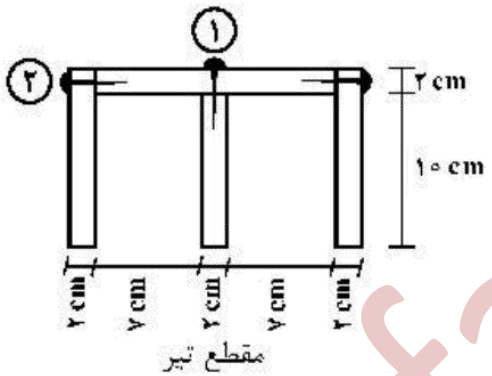
$$(*)\Rightarrow t^3(z)=t_0^3/l\,z\Rightarrow \boxed{t(z)=t_0\,(z/l)^{1/3}}$$

۴۹- مقطع تیر یک سر گیردار مطابق شکل از اتصال چهار قطعهٔ چوبی ساخته شده است. اگر فاصلهٔ همهٔ میخ‌ها در طول تیر یکسان باشد، نسبت نیروی برشی ایجاد شده در میخ شماره ۲ به نیروی برشی میخ شماره ۱ کدام است؟

۱) ۰/۷
۲) ۰/۶۷۵
۳) ۱/۴
۴) ۱/۳۵

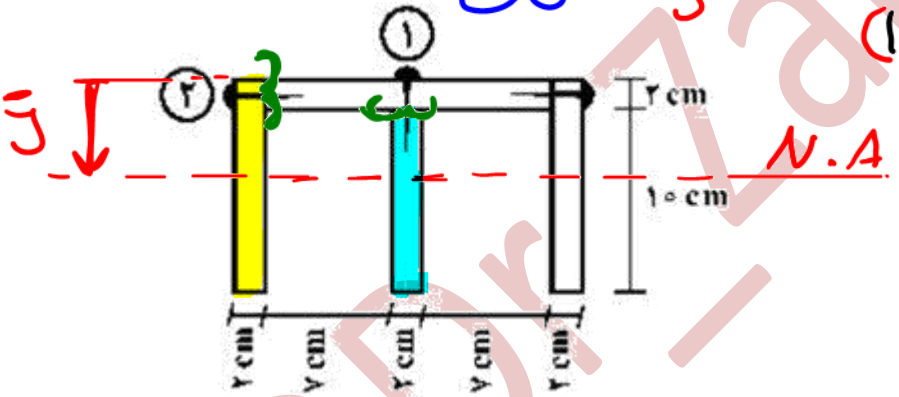


تیر و بارگذاری



مقطع تیر

گزینه (۱) ـ متوسط



کز سطح مقطع $\bar{y} = \dfrac{(10\times2)\times3\times7 + (2\times2)\times1}{(10\times2)\times3 + (2\times2)}$

$\bar{y} = 23/5$

نیروی میخ از رابطه روبرو به دست می‌آید:

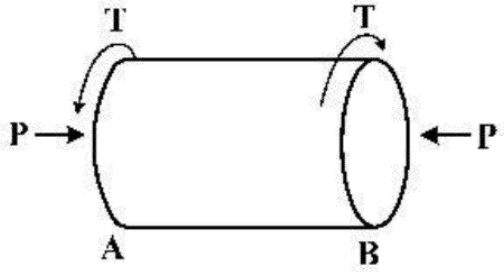
$$F_{n} = \frac{V \times Q_{n}}{I} \times e_{n}$$

با توجه به اینکه فاصله میخ‌ها یکی است داریم:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{(12\times2)\times(6-23/5)}{(10\times2)\times(7-23/5)}$$

$$\Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{6\times7}{5\times12} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 0.7$$

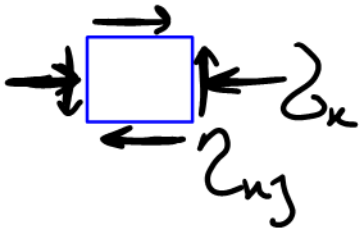
۵۰- میلهٔ AB به قطر ۲۰mm تحت بار محوری P = ۱۸۸/۴kN و پیچش T = ۶۲۸N.m می‌باشد. حداکثر تنش برشی ایجاد شده در میله چند MPa است؟



۱) ۵۰۰
۲) ۴۰۰
۳) ۶۰۰
۴) ۳۰۰

گزینه (۱) ـ صحیح

المان مربوط به محیط میله به صورت مقابل می‌باشد:



$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{188.4\times10^3\ N}{\pi\times10^2\ mm^2} = 600\ MPa$$

$$\tau_{xy} = \frac{T\times R}{J} = \frac{628\times10^3\ N.mm\times10\ mm}{\left(\frac{\pi\times10^4}{2}\right)} = 400\ MPa$$

در این المان حداکثر تنش برشی مطابق با رابطه مربوط به شعاع دایره مور برابر است با:

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{600}{2}\right)^2 + (400)^2}$$

$$\Rightarrow \tau_{max} = 500\ MPa$$

۵۱- در نقطه‌ای از بدنه جسمی فلزی که در حالت تنش صفحه‌ای قرار دارد، کرنش‌های اصلی $\varepsilon_1 = ۴\times۱۰^{-۵}$ و $\varepsilon_۲ = ۱\times۱۰^{-۵}$ توسط کرنش‌سنج‌ها اندازه‌گیری شده است. مقدار حداکثر تنش برشی در نقطه مذکور حدوداً چند مگاپاسکال می‌باشد؟ (مدول الاستیسیته و نسبت پواسون جسم را به‌ترتیب ۲۰۰GPa و ۰/۲۵ در نظر بگیرید.)

۱) ۱/۸۷۵
۲) ۲/۲۵
۳) ۳/۷۵
۴) ۴/۲۵

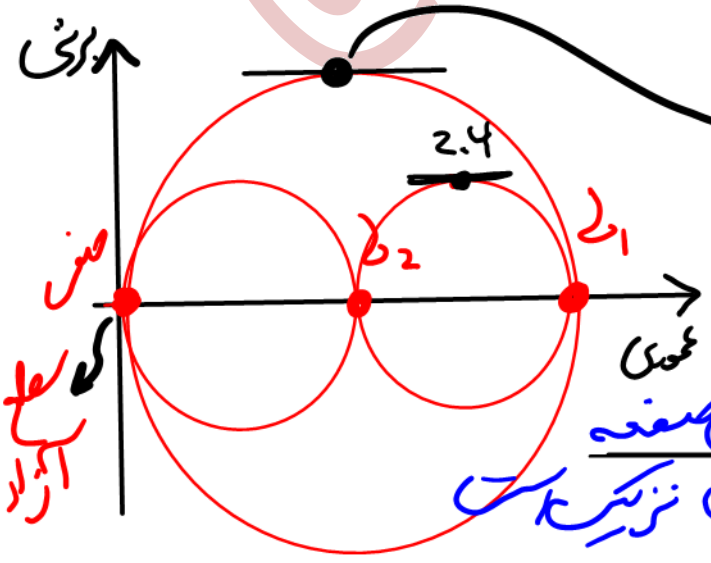
گزینه (۲) - صحیح

رابطه تنش‌ها و کرنش‌های اصلی در حالت تنش سطح برابر است با:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_1 + \upsilon\varepsilon_2) \Rightarrow \sigma_1 \simeq 9\ MPa$$

($E = 200\times10^3\ MPa$, $\upsilon = 1/4$, $\varepsilon_1 = 4\times10^{-5}$, $\varepsilon_2 = 1\times10^{-5}$)

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\upsilon^2}(\varepsilon_2 + \upsilon\varepsilon_1) \Rightarrow \sigma_2 \simeq 4.25\ MPa$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} \simeq 4.5\ MPa$$

حداکثر تنش برشی داخل صفحه تقریباً 2.4 MPa می‌باشد که به گزینه (۲) نزدیک‌تر است.

@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam

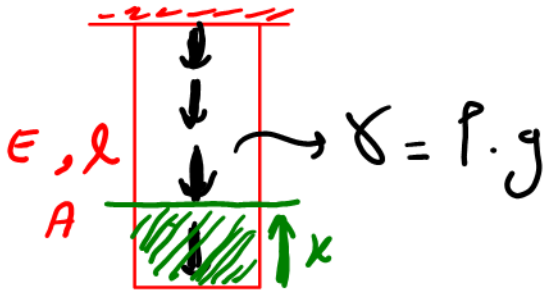
۵۲- میله‌ای به طول l از مصالحی با وزن مخصوص ρg ساخته شده است که رابطه تنش ـ کرنش آن به‌صورت $\sigma = k\sqrt{\varepsilon}$ می‌باشد. این میله را در راستای قائم از تکیه‌گاهی آویزان می‌کنیم. میزان تغییر مکان انتهای آزاد پایین میله (تغییر طول کل میله) تحت اثر وزن آن کدام است؟

۱) $\frac{\rho^2 g^2 L^3}{3k^2}$

۲) $\frac{\rho^2 g^2 L^3}{k^2}$

۳) $\frac{3\rho^2 g^2 L^3}{k^2}$

۴) $\frac{\rho^2 g^2 L^3}{2k^2}$



گزینه (۱) ـ اشتوار

$$\Delta = \int \varepsilon \cdot dx \Rightarrow \Delta = \int \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 \cdot dx \Rightarrow \Delta = \int \left(\frac{\gamma . x}{k}\right)^2 \cdot dx$$

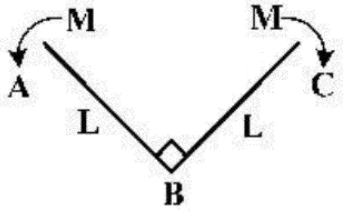
$$\sigma = k\sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{\sigma}{k}\right)^2 \qquad \sigma(x) = \frac{W(x)}{A} = \frac{\gamma . A . x}{A} = \gamma . x$$

$$\Rightarrow \Delta = \int_0^l \left(\frac{\rho . g}{k}\right)^2 . x^2 dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{\rho^2 . g^2}{k^2} \; l^3/3}$$

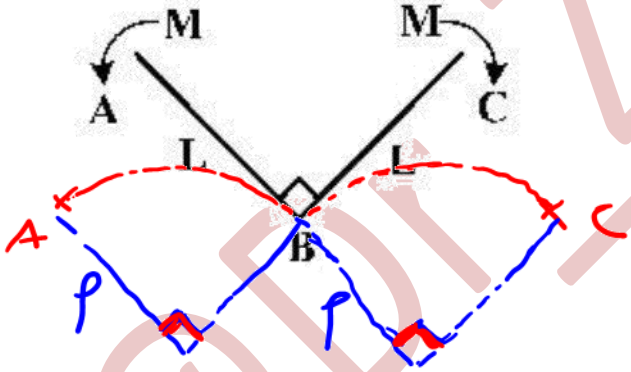
@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam

۵۳- در سازه مقابل مقدار لنگر M چقدر باشد تا نقاط A، B و C در یک امتداد قرار گیرند؟
(مقطع اعضاء دایره‌ای به قطر d و E مدول ارتجاعی مصالح است.)



۱) $\frac{\pi^2 Ed^4}{64L}$
۲) $\frac{\pi^2 Ed^4}{4L}$
۳) $\frac{\pi^2 Ed^4}{2L}$
۴) $\frac{\pi^2 Ed^4}{128L}$

گزینه (۳) ـ متوسط



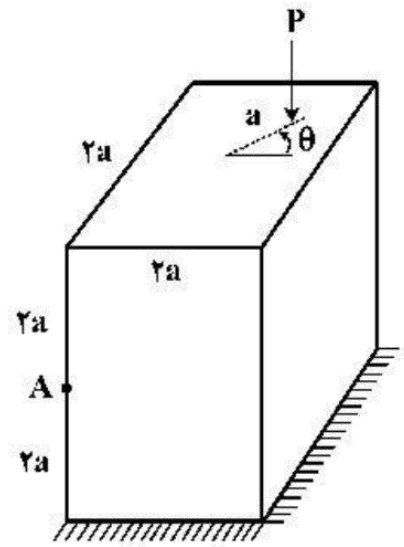
با توجه به تقارن بودن لنگر در دست، AB و BC، تغییر شکل خنثی این قسمت‌ها به صورت کمانی از دایره می‌باشد و داریم:

$$M = \frac{EI}{\rho} \xrightarrow{\rho \times \pi/2 = l} M = \frac{EI}{(2l/\pi)}$$

$$I_{\text{دایره}} = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow \boxed{M = \frac{\pi^2 E d^4}{128 l}}$$

@Dr_Zarfam

۵۴- در ستون مقابل بار P با شعاع چرخش a حول مرکز مقطع در بازه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ می‌چرخد. در این صورت حداکثر تنش ایجادشده در نقطه A برحسب $\frac{P}{a^2}$ کدام است؟



۱) $\left(\frac{48\sqrt{2}-1}{4}\right)$

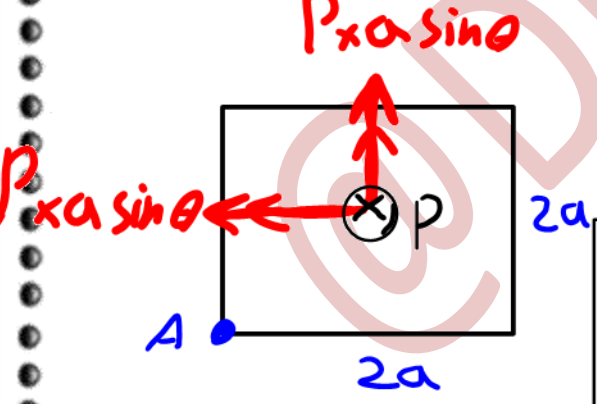
۲) $\left(\frac{3\sqrt{2}-1}{4}\right)$

۳) $\left(\frac{48\sqrt{2}-4}{4}\right)$

۴) $\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4}\right)$

گزینه (۲) ـ متوسط

ستون داده شده تحت خمش مورب می باشد و لذا تنش در گوشه A برابر است با:



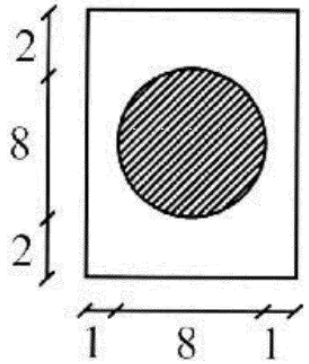
$$\sigma_A(\theta) = \frac{-P}{(2a)^2} + \frac{P_x a \sin\theta}{(2a)^3/6} + \frac{P_x a \cos\theta}{(2a)^3/6}$$

$$\Rightarrow \sigma_A(\theta)_{max} = \frac{P}{a^2}\left[\frac{3}{4}\left(\sin\theta+\cos\theta\right) - \frac{1}{4}\right] \quad \text{حداکثر ستاره} \rightarrow \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_A(\theta) = \frac{P}{a^2}\left(\frac{3\sqrt{2}-1}{4}\right)$$

@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam

۵۵ مقطع روبه‌رو از دو ماده مطابق شکل ساخته شده است. بخش هاشور خورده ماده‌ای با مدول الاستیسیته ۲۰۰MPa و بخش بدون هاشور ماده‌ای با مدول الاستیسیته ۵۰MPa است. سهم بخش هاشور خورده از لنگر وارده حول محور قوی کدام گزینه است؟



۱) $\frac{8\pi}{45+6\pi}$

۲) $\frac{6\pi}{45+8\pi}$

۳) $\frac{8\pi}{45+8\pi}$

۴) $\frac{6\pi}{45+6\pi}$

گزینه (۱) ـ ساده

سهم گزینی هاشور خورده مقطع غیرهمگن وارده شده برابر است با:

$$M_{\text{هاشور خورده}} = \frac{(EI)_{\text{هاشور خورده}}}{(EI)_{\text{هاشور خورده}} + (EI)_{\text{هاشور نخورده}}} \times M$$

با توجه به اینکه محور قوی مقطع، محور افقی در نظر گرفته شده است:

$$I_{\text{هاشور خورده}} = \frac{\pi \times 4^4}{4} = 64\pi \qquad I_{\text{هاشور نخورده}} = \frac{10 \times 12^3}{12} - \frac{\pi \times 4^4}{4}$$

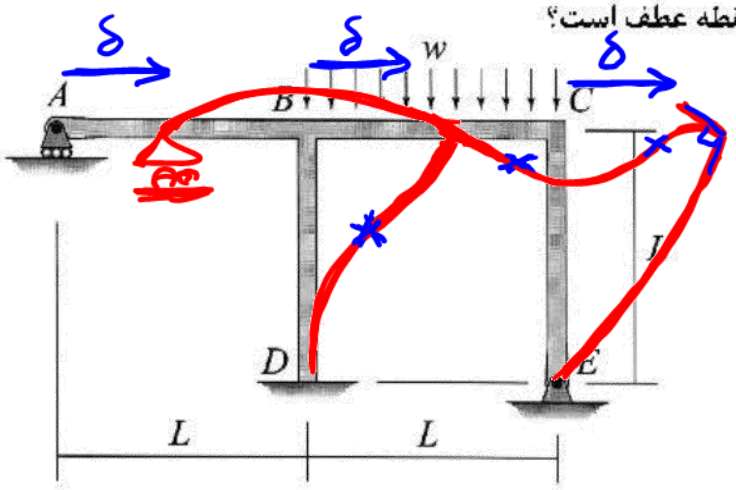
$$\Rightarrow M_{\text{هاشور خورده}} = \frac{200 \times 64\pi}{200 \times 64\pi + 50 \times (1440 - 64\pi)} \times M$$

$$\Rightarrow M_{\text{هاشور خورده}} = \frac{4 \times 64\pi}{3 \times 64\pi + 1440} \times M \rightarrow \frac{8\pi}{6\pi + 45}$$

@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam

۵۶ منحنی الاستیک قاب نشان داده شده دارای چند نقطه عطف است؟

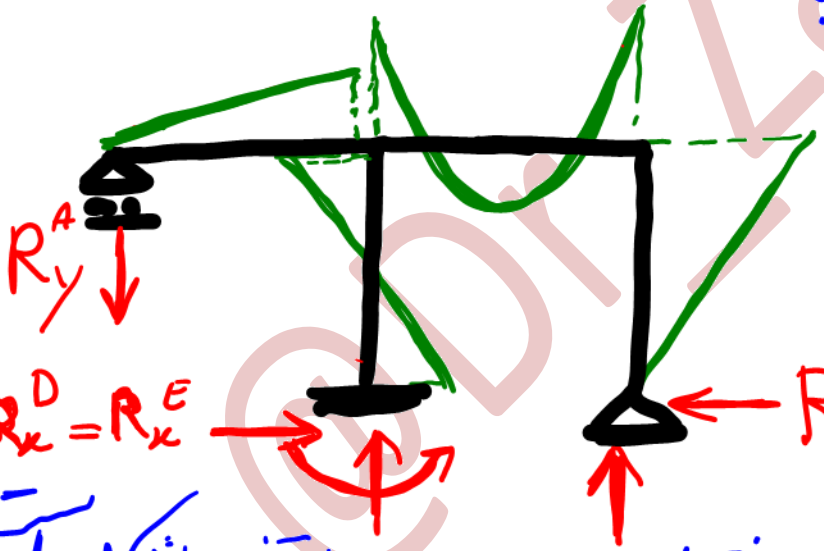
۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵



گزینه (۲) ـ متوسط

نمودار تغییر شکل شما تقریبا درست رسم شده است (↑)

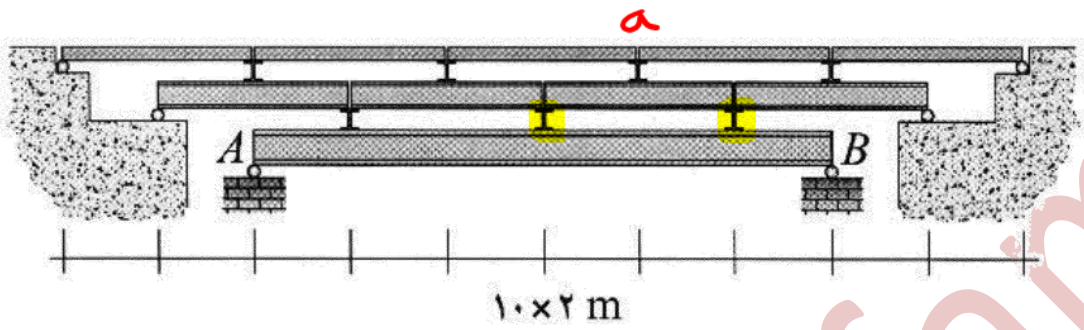
با توجه به اینکه تکیه گاه گیردار شده
سه درجه نامعین می باشد
نمودار لنگر خمشی آن به صورت
شما تقریبا مطابق رو برو است



* نقاط لنگر صفر نشان دهنده نقطه عطف نمودار تغییر شکل است

* دقت شود که با توجه به عکس العمل R_y^A و همچنین R_x^E هیچ کدام در تیر AB و ستون CE لنگر صفر نبوده و نمی توان در این دو عضو نقطه عطف داشته باشیم

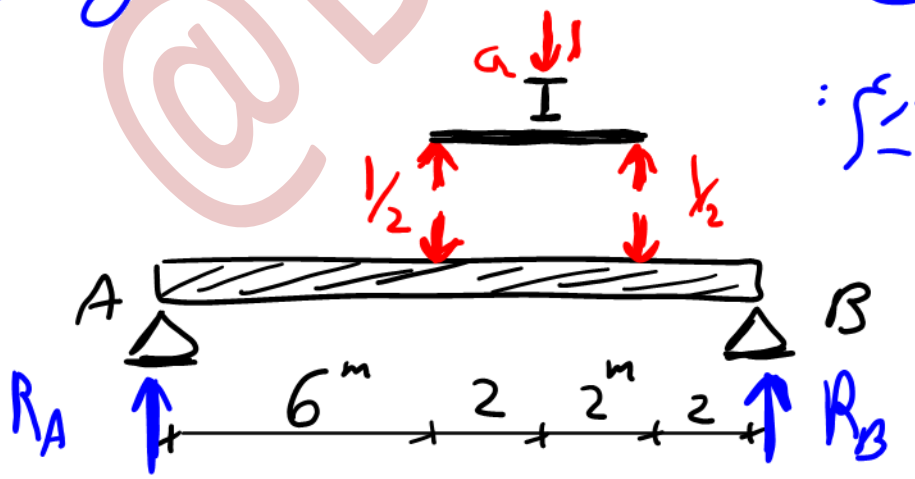
۵۷- مقادیر حداکثر گشتاور خمشی و حداکثر نیروی برشی ایجاد شده در تیر AB به‌ازای عبور بار واحد متحرکی بر روی فوقانی‌ترین سطح پل به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟



۱) ۲ و $\frac{۱}{۳}$
۲) ۲ و $\frac{۲}{۳}$
۳) ۳ و $\frac{۲}{۳}$
۴) ۳ و $\frac{۱}{۳}$

گزینه (۲) ـ متوسط

اگر بار واحد روی گره a قرار بگیرد نیروی آن از طریق دو تیر فرعی زرد رنگ شان داده شده به تیر اصلی AB منتقل می‌گردد که در این حالت بیشترین برش و لنگر در تیر AB ایجاد می‌شود و داریم:



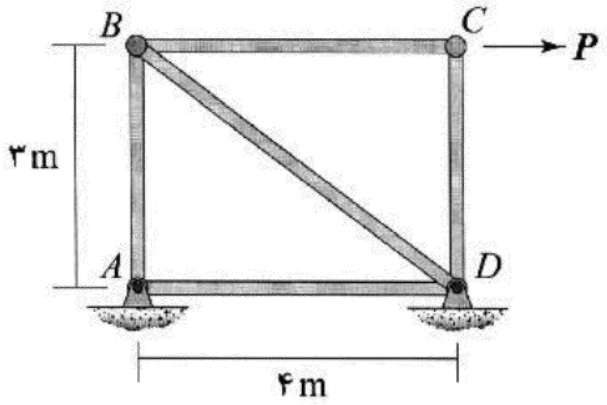
حداکثر برش ⇐

حداکثر لنگر ⇐

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_B \times 12^m = \frac{1}{2} \times 6^m + \frac{1}{2} \times 10^m \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{2}{3}}$$

$$M_{max} = R_A \times 6^m \Rightarrow M_{max} = \frac{1}{3} \times 6^m \Rightarrow \boxed{M_{max} = 2^m}$$

۵۸- پس از اعمال بار P، عضو BD به چه میزان نسبت‌به موقعیت اولیه خود دوران پیدا می‌کند؟ (می‌دانیم که EA برای تمامی اعضای خرپا یکسان است.)



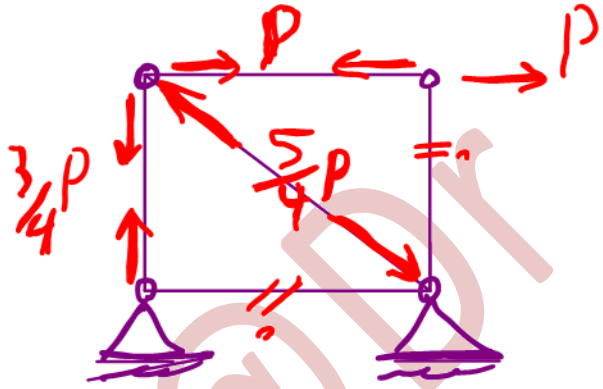
۱) $\frac{۱۹P}{۶EA}$

۲) $\frac{۱۵P}{۲EA}$

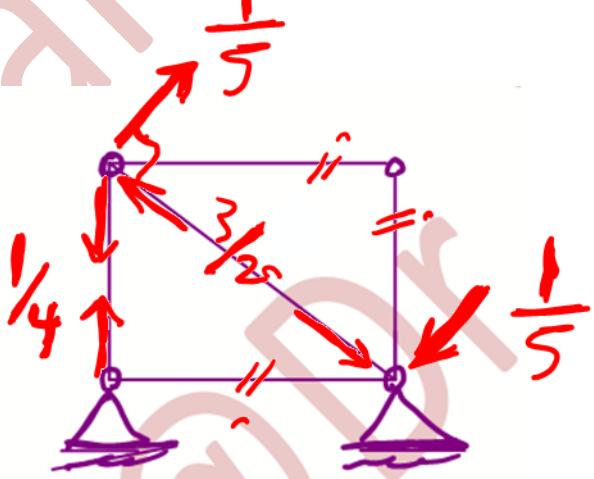
۳) $\frac{۳P}{۲EA}$

۴) $\frac{۹P}{۱۶EA}$

گزینه (۳) ـ سلام



(اصلی)



(واحد)

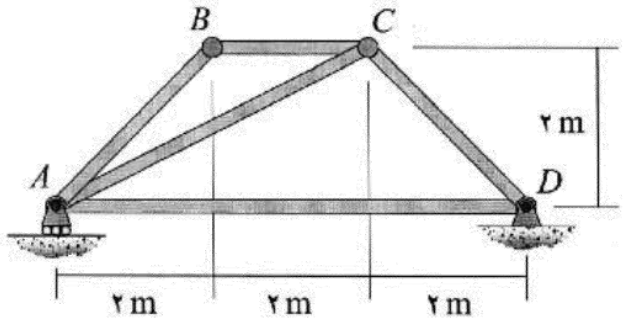
$$1 \times \theta_{\overline{BD}} = \sum \frac{n.N.l}{EA}$$

مطابق با رابطه کار مجازی برای خرپاها داریم:

$$\Rightarrow \theta_{\overline{BD}} = \frac{1}{EA}\left[\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}P \times 3 + \frac{3}{20} \times \frac{5}{4}P \times 5\right]$$

$$\Rightarrow \theta_{\overline{BD}} = \frac{3}{2}\frac{P}{EA}$$

۵۹ اگر دمای عضو AC به میزان ΔT تغییر کند، گره B به چه میزان به تکیه‌گاه D نزدیک و یا از آن دور می‌شود؟
(α معرف ضریب انبساط حرارتی اعضای خرپاست.)



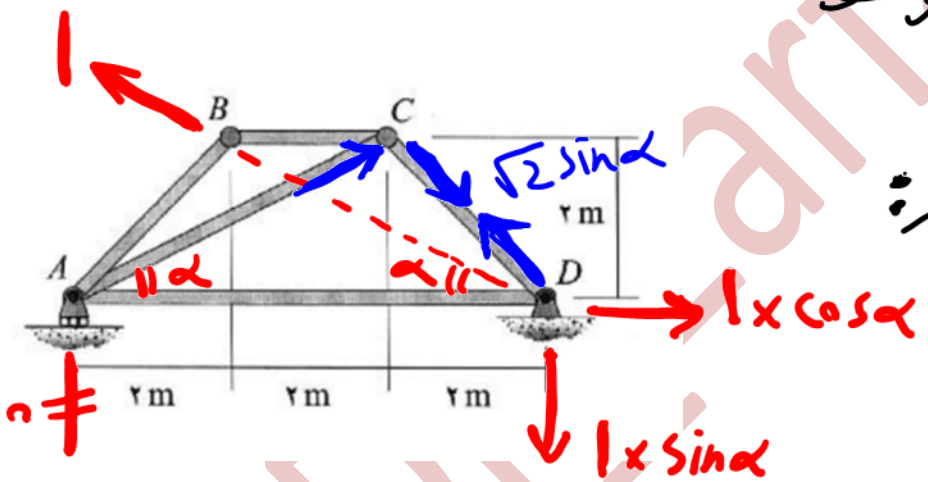
۱) $\frac{۱۰}{۳}\alpha\Delta T$

۲) $\frac{۱۰}{۳}\sqrt{۲}\alpha\Delta T$

۳) $۲\sqrt{۵}\alpha\Delta T$

۴) $\alpha\Delta T$

گزینه (۳) ـ متوسط



سازه واحد:

گره D: $\sum F_y = 0 \Rightarrow n_{DC} = \sqrt{2}\sin\alpha$

گره C: $\sum F_y = 0 \Rightarrow n_{AC}\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha \times \cos 45 \Rightarrow n_{AC} = 1$

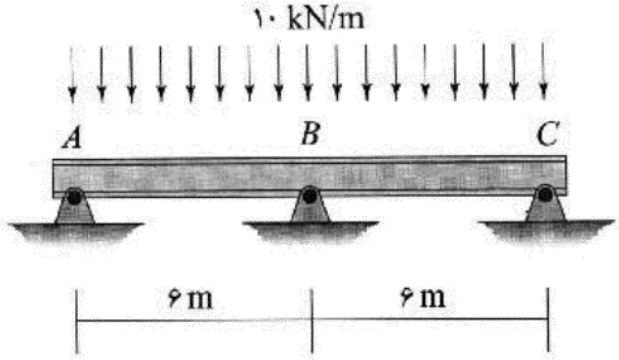
با نوشتن رابطه کارمجازی در خرپا داریم:

$$1 \times \Delta_{B,D} = (n_{AC})(\alpha)(\Delta T)(l_{AC})$$

$n_{AC} = -1$ ، $l_{AC} = \sqrt{20}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta_{B,D} = -2\sqrt{5}\,\alpha\Delta T}$$

۶۰- در تیر نشان داده شده می‌دانیم که تکیه‌گاه B نشست می‌کند. حال تعیین کنید که میزان این نشست چقدر باشد تا در نقطهٔ B لنگر خمشی مثبتی به بزرگی ۱۸۰ kN.m ایجاد شود؟ (EI در تمام طول تیر ثابت است.)

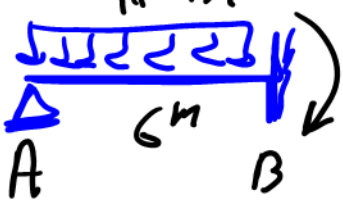


۱) $\frac{۲۲۵}{EI}$
۲) $\frac{۵۴۰}{EI}$
۳) $\frac{۲۵۲۰}{EI}$
۴) $\frac{۲۷۰۰}{EI}$

گزینه ۲ ـ متوسط!

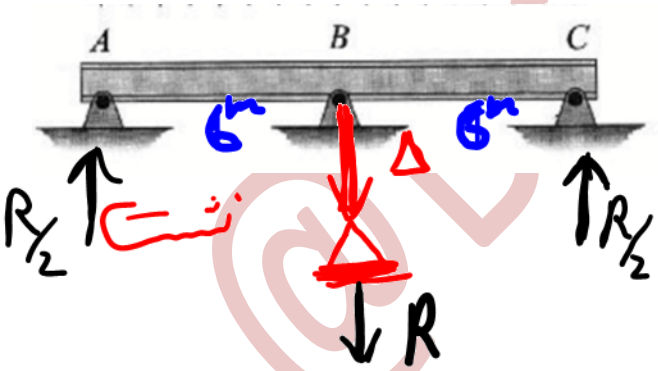
متقارن متقارن

فرمول حفظی ۲۲



$$M_B = \frac{10 \times 6^2}{8} = 45^{KN.m}$$

گشتاور منفی



نشست

تغییر مکان حفظی ۵

$$\Delta = \frac{R(12)^3}{48EI}$$

$$M_B = R_{/2} \times 6^m = 3R$$

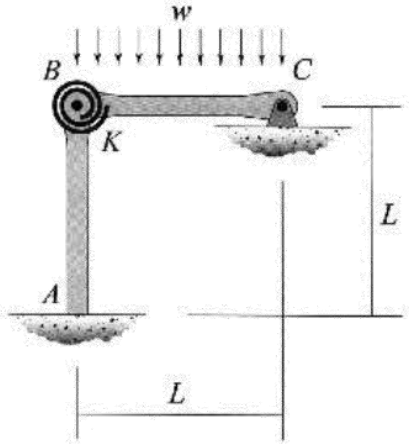
لنگر مثبت

مطابق با صورت سوال داریم:

$$180^{KN.m} = 3R - 45^{KN.m} \Rightarrow R = 75^{KN}$$

$$\Delta = \frac{R(12)^3}{48EI} \xrightarrow{75^{KN}} \Delta = \frac{27^m}{EI}$$

۶۱ لنگر ایجاد شده در فنر پیچشی B را به سختی $K = ۴\frac{EI}{L}$ بیابید؟ (EI برای تمامی اعضا یکسان است.)



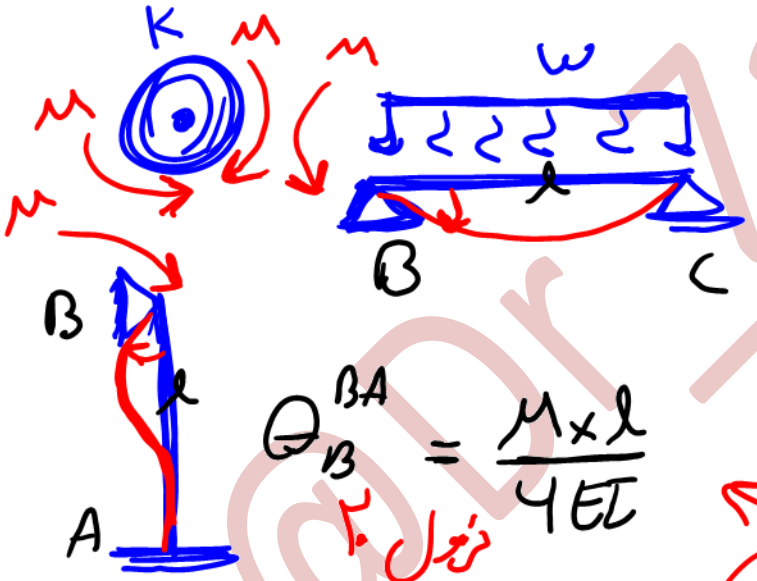
۱) $\frac{wL^۲}{۴۰}$

۲) $\frac{wL^۲}{۲۴}$

۳) $\frac{wL^۲}{۲۰}$

۴) $\frac{wL^۲}{۱۴}$

گزینه ۳ - دشوار



$\theta_B^{BC} = \frac{wl^3}{24EI} - \frac{Ml}{3EI}$ (فرمول ۹ و فرمول ۴)

$\theta_B^{BA} = \frac{M \times l}{4EI}$ (فرمول ۲۰)

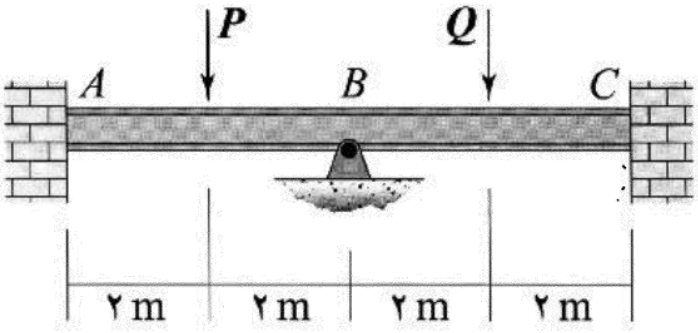
رابطه سازگاری :

$$\Delta\theta_{\text{فنر}} = \theta_B^{BC} - \theta_B^{BA}$$

$\frac{M}{K_{\text{فنر}}} \rightarrow 4EI/l$

$$\Rightarrow \frac{M}{4} = \left(\frac{wl^3}{24} - \frac{M}{3}\right) - \frac{M}{4} \Rightarrow \boxed{M = \frac{wl^2}{20}}$$

۶۲- نسبت $\frac{P}{Q}$ چقدر باشد تا هیچ یک از نقاطی که در دهانه BC قرار دارند تغییر مکان عمودی به سمت پایین نداشته باشند؟ (EI برای تمام طول تیر ثابت است.)



۱) $\frac{P}{Q} > ۱$

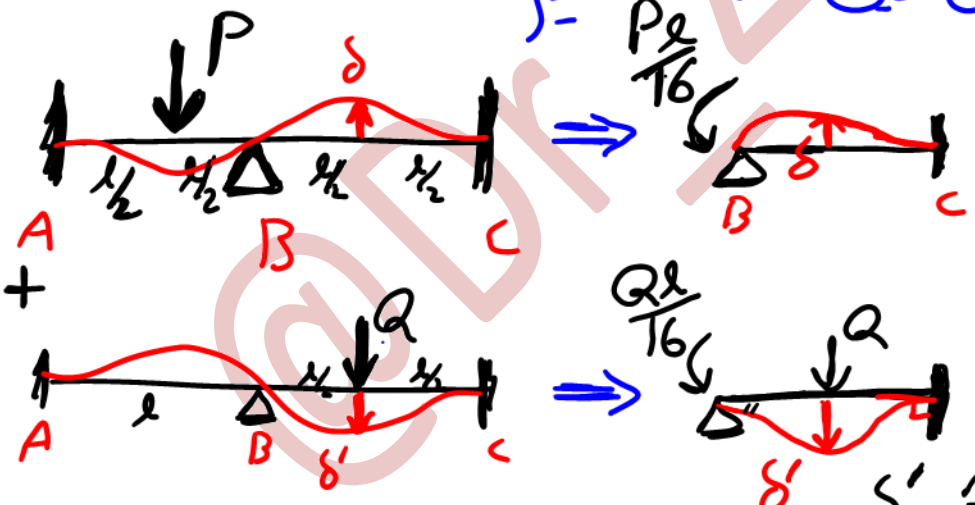
۲) $\frac{P}{Q} > ۳$

۳) $\frac{P}{Q} > ۵$

۴) لزوماً بایستی جهت نیروی Q معکوس شود.

گزینه (۳) ـ دشوار

حداکثر تغییرمکان در قسمت BC لزوماً زیر بار Q اتفاق نمی‌افتد ولی اگر جهت Q را عوض کنیم به سهولت حالت حداکثر تغییرمکان در این نقطه باشد داریم:



$$\delta = \frac{(Pl/16)\times l^2}{32EI}$$

$$\delta' = \frac{7}{768}\frac{Ql^3}{EI} - \frac{(Ql/16)\times l^2}{32EI}$$

برای اینکه قسمت BC تغییرمکان رو به پایین نداشته باشد می‌بایست:

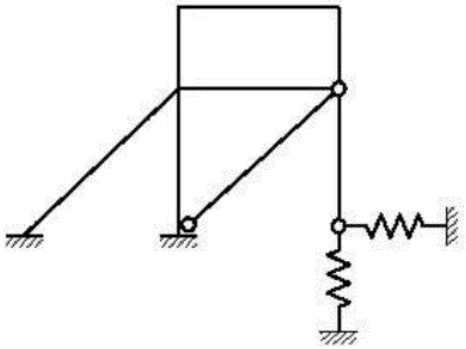
$$\delta > \delta' \Rightarrow \frac{Pl^3}{16\times 32EI} > \left(\frac{7}{24\times 32} - \frac{1}{16\times 32}\right)\frac{Ql^3}{EI}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{Q} > \frac{11}{3} \simeq 3.7}$$

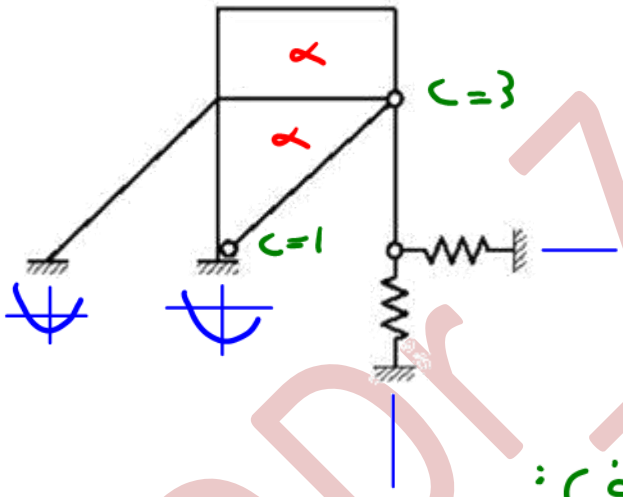
دقت شود که در حالت گزینه ۳ قطعاً تغییرمکان رو به بالا باشد

۶۳- درجه نامعینی سازه زیر کدام است؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹



گزینه (۲) ـ سازه



رابطه ذکای ستبه دریلبه درجه نامعینی :

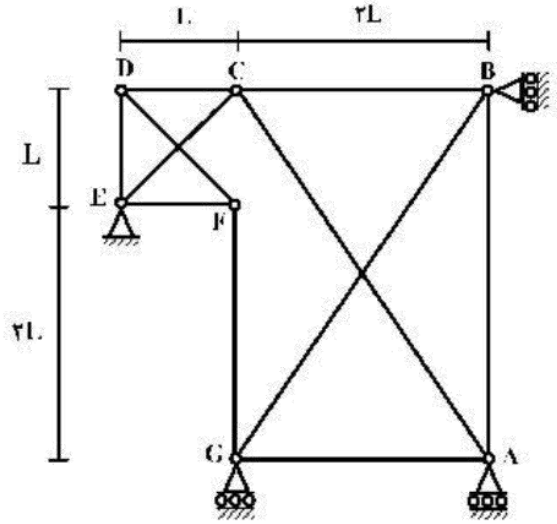
$$n = 3k + r - (c+3)$$

k: 2 ، r: 8 ، c: 4

$$\Rightarrow \boxed{n = 7}$$

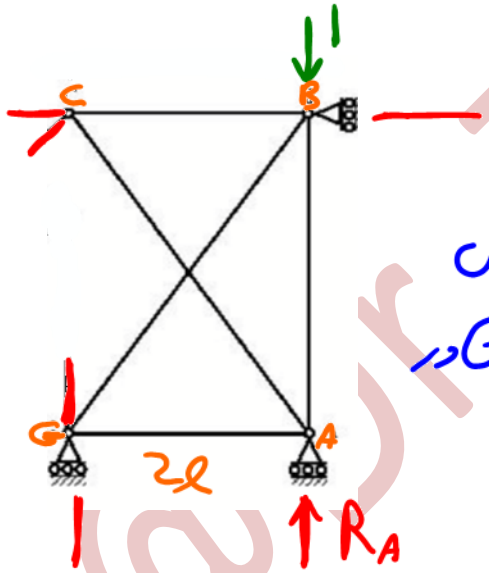
@Dr_Zarfam

۶۴- در خرپای زیر حداکثر عکس‌العمل تکیه‌گاه A در اثر عبور بار گسترده یکنواختی به شدت W و طول L کدام است؟
(بار در قسمت فوقانی خرپا حرکت می‌کند.)



۱) $\frac{۳}{۲}WL$
۲) $\frac{۵}{۶}WL$
۳) $\frac{۳}{۴}WL$
۴) WL

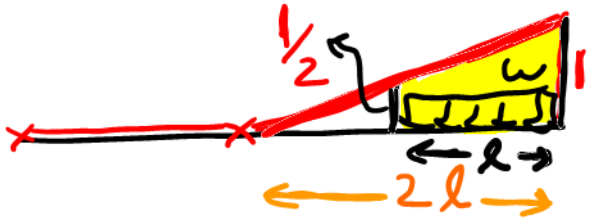
گزینه (۳) ـ متوسط



اگر بار واحد را روی گره B قرار دهیم و مثلث ABC و G فنر را مطابق شکل روبرو جدا کرده و حول گره C گشتاور بگیریم داریم:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_A \times 2l = 1 \times 2l \Rightarrow R_A = 1$$

با قرار دادن بار واحد روی گره‌های C و D مقدار R_A با استدلال مشابه صفر به دست می‌آید ولذا نمودار خط تأثیر برابر است با:

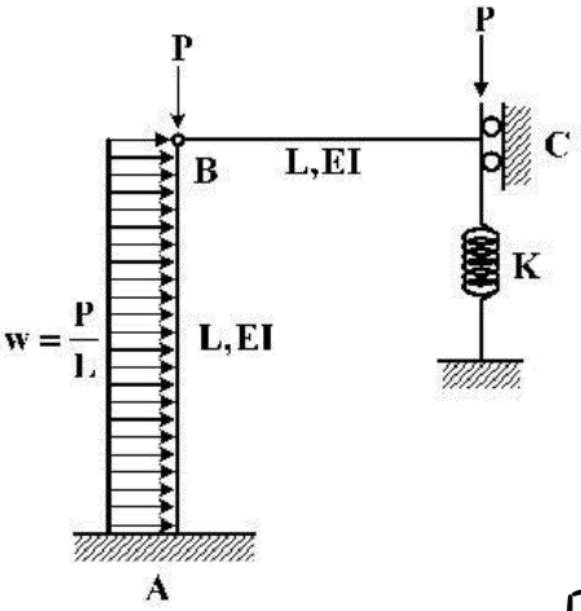


$$R_A^{max} = w \times \frac{(1+1/2)}{2} \times l$$

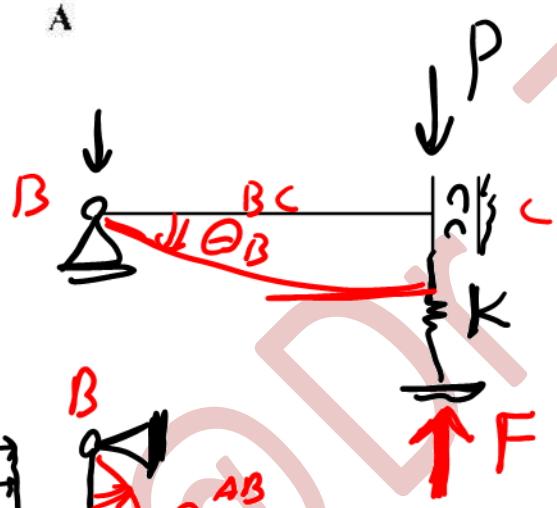
$$\Rightarrow R_A^{max} = \frac{3}{4}wl$$

۶۵- در قاب نمایش داده شده سختی فنر (K) چقدر باشد تا مقدار دوران طرفین مفصل B با هم برابر شود؟

۱) $48\frac{EI}{L^3}$
۲) $69\frac{EI}{L^3}$
۳) $12\frac{EI}{L^3}$
۴) $23\frac{EI}{L^3}$



گزینه (۲) ـ متوسط



$$\theta_B^{BC} = \frac{(P-F)L^2}{2EI}$$

θ_B^{BC} نزول

$$\theta_B^{AB} = \frac{wL^3}{48EI} \quad w = P/L$$

θ_B^{AB} نزول

$$\theta_B^{AB} = \theta_B^{BC}$$

$$F = \frac{23}{24}P$$

برای برابر آوردن سختی فنر از روش سختی داریم:

$$F = \frac{k_{فنر}}{k_{فنر} + k_{تیر}} \times P \quad \text{(تیر: } 3EI/L^3\text{)}$$

$$\frac{23}{24}P$$

$$\Rightarrow 23k + 69EI/L^3 = 24k$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 69\ EI/L^3}$$

@Dr_Zarfam
instagram:Dr_Zarfam