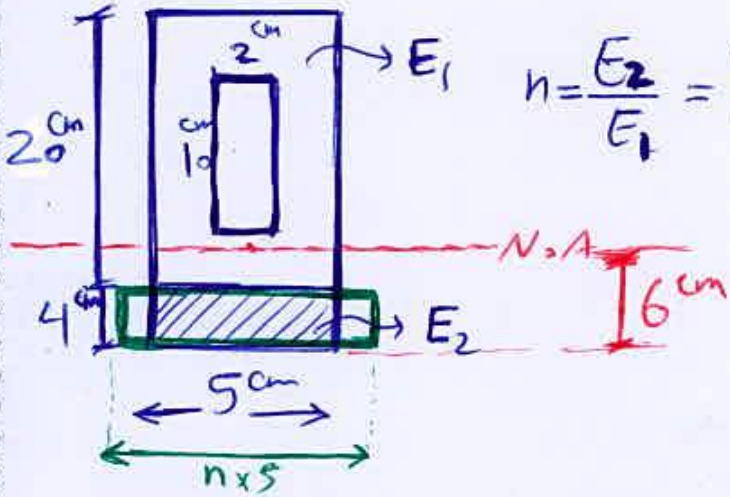
صفحه ۶۰

(۱۵)



$n = \frac{E_2}{E_1} = ?$

روش اول:

$$Q_{\text{بالای N.A}} = Q_{\text{پایین N.A}} \Longrightarrow$$

$$(18\times5)\times9 - (10\times2)\times8 = (2\times5)\times1 + (n\times5\times4)\times4$$

$$\Rightarrow 64n = 80n \Rightarrow \boxed{n=8}$$

روش دوم:

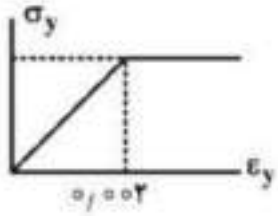
$$\bar{y} = 6^{cm} = \frac{(5n\times4)\times2 + (20\times5)\times14 - (10\times2)\times14}{(5n\times4) + (20\times5 - 10\times2)}$$

مرکز سطح مقطع مجازی

$$\Rightarrow \boxed{n=8}$$

گزینه (۳) (متوسط)

۴۶- تیری به طول ۴ متر، با مقطع مستطیلی به ارتفاع ۲۰cm و عرض ۵cm مورد نظر است. لنگر وارده به تیر، متوسط لنگر پلاستیک کامل و لنگر تسلیم مقطع است. اگر مقدار تنش تسلیم ۲۴۰MPa و نمودار تنش کرنش به‌صورت زیر باشد، شعاع انحنای تیر در این حالت چند متر است؟ (E = ۲۰۰GPa)



۱) ۱۲/۵
۲) ۲۵
۳) ۵۰
۴) ۱۰۰

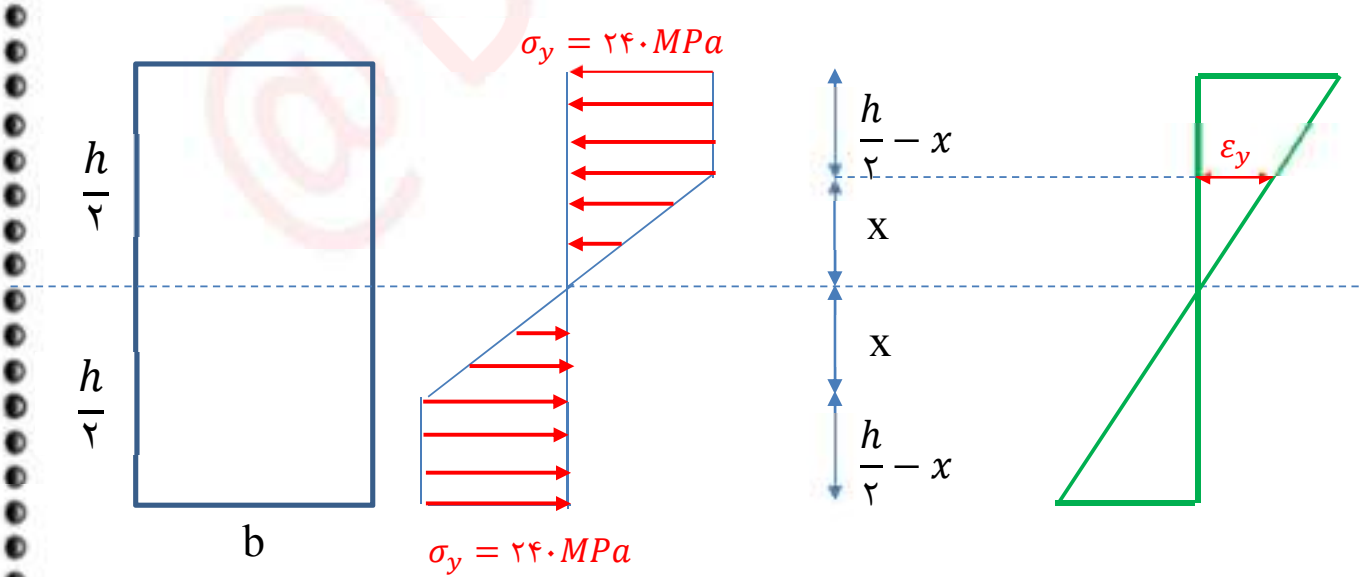
پاسخ سوال ۴۶) گزینه ؟ (دشوار)

- لنگر (متوسط لنگرهای تسلیم و پلاستیک) وارد بر مقطع برابر است با :

$$M = \frac{M_P + M_y}{۲} = \frac{Z\sigma_y + S\sigma_y}{۲} = \frac{\frac{bh^۲}{۴} + \frac{bh^۲}{۶}}{۲} \times \sigma_y$$

$$M = \frac{۵}{۲۴} bh^۲ \times \sigma_y$$

- حال تحت لنگر وارده توزیع تنش روی مقطع محاسبه می‌گردد :



- با توجه به تعادل داریم :

$$M = \frac{۵}{۲۴} bh^۲ \times \sigma_y = F_۱ \times d_۱ + F_۲ \times d_۲$$

$$۲ \times [(\sigma_y \times (\frac{h}{۲} - x) \times (\frac{\frac{h}{۲} - x}{۲} + x) \times b) + (\sigma_y \times \frac{x}{۲} \times \frac{۲x}{۳} \times b)]$$

$$= \frac{۵}{۲۴} bh^۲ \times \sigma_y$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۴} h$$

- حال با توجه به مقدار x و $\varepsilon_y = ۰.۰۰۲$ مطابق با نمودار تنش-کرنش نشان داده شده داریم :

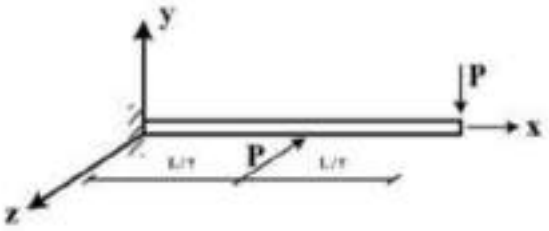
$$\rho\left(\text{شعاع انحنا}\right) = \frac{x}{\varepsilon_y} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۴} \times ۰.۲m}{۰.۰۰۲} \simeq ۳۵m$$

- مقدار کرنش تسلیم به دست آمده از رابطه هوک با عدد داده شده در نمودار تنش-کرنش متفاوت است (!) و اگر بر این اساس مجددا شعاع انحنا محاسبه شود داریم:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{۲۴۰ \times ۱۰^{-۳}}{۲۰۰} = ۰.۰۰۱۲ \Longrightarrow \rho = \frac{x}{\varepsilon_y} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۴} \times ۰.۲m}{۰.۰۰۱۲} \simeq ۶۰m$$

- مشاهده می‌شود که همچنان پاسخ در گزینه ها موجود نمی‌باشد.

۴۷- اگر سطح مقطع تیر طره با مقطع مستطیلی نمایش داده شده برابر A، ارتفاع مقطع برابر b و عرض آن برابر با a باشد، مقادیر b و a چقدر باشند تا حداکثر تنش ناشی از خمش در دو جهت یکسان گردد؟ (تکیه‌گاه گیردار در سمت چپ است)



۱) $a=\sqrt{A}\ ,\ b=\sqrt{A}$

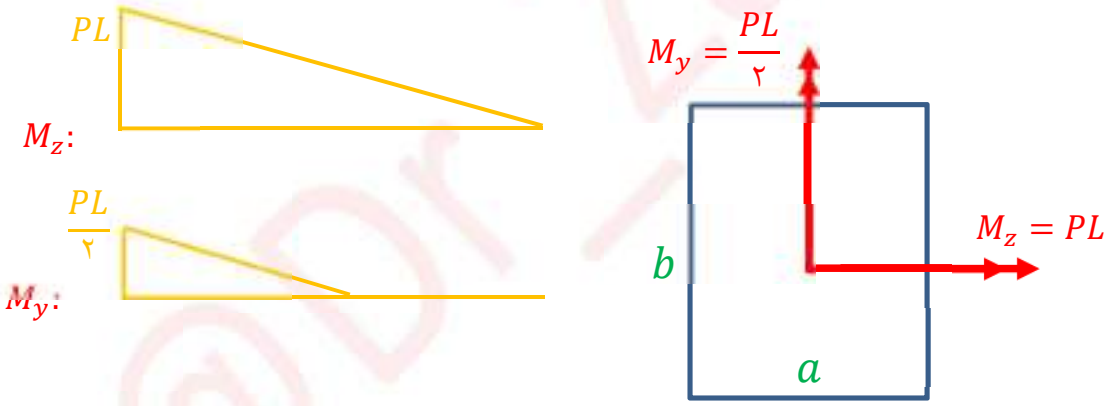
۲) $a=۲\sqrt{A}\ ,\ b=\sqrt{\frac{A}{۲}}$

۳) $a=\sqrt{۲A}\ ,\ b=\sqrt{\frac{A}{۲}}$

۴) $a=\sqrt{\frac{A}{۲}}\ ,\ b=\sqrt{۲A}$

پاسخ سوال ۴۷) **گزینه ۴ (ساده)**

- برای محاسبه حداکثر تنش ناشی از خمشی حداکثر مقدار لنگر ایجاد شده در تیر (که در انتهای تیر طره رخ می دهد) را محاسبه می‌کنیم :



- حال مقدار حداکثر تنش ایجاد شده ناشی از M_z را با تنش ایجاد شده ناشی ناشی از M_y برابر قرار خواهیم داد :

$$\frac{M_z(=PL)\times\frac{b}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}ab^۳}=\frac{M_y\left(=\frac{PL}{۲}\right)\times\frac{a}{۲}}{\frac{۱}{۱۲}ba^۳}\Rightarrow b=۲a$$

از طرفی با توجه به اینکه A=ab مقادیر a و b برابر است با :

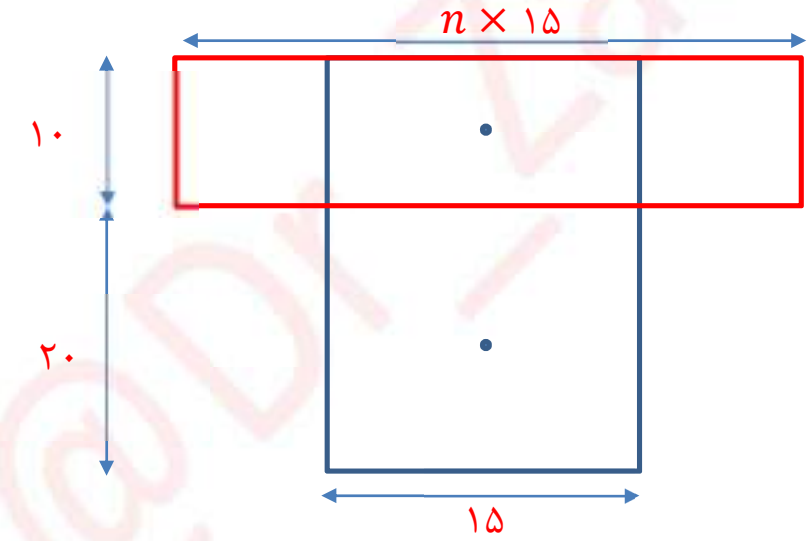
$$a=\sqrt{\frac{A}{۲}}\ \ ;\ \ b=\sqrt{۲A}$$

۴۸- یک مقطع مرکب مستطیل شکل به عرض ۱۵cm و عمق (ارتفاع) برابر ۳۰cm از دو ماده مختلف است به صورتی‌که ماده اول با مدول ارتجاعی E_1 دارای عمق ۱۰cm در بخش بالایی مقطع و ماده دوم با مدول ارتجاعی E_2 به عمق ۲۰cm در بخش پایینی مقطع قرار دارند. نسبت E_1 به E_2 در یک بارگذاری معین چقدر باشد تا در تراز فصل مشترک دو ماده، $\sigma_1 = \sigma_2$ شود؟

۱) $\frac{1}{4}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ سوال ۴۸) **گزینه ۴** (متوسط)

- در فصل مشترک دو مصالح همواره تنش خمشی در دو قسمت یکسان نبوده و پرش دارد مگر اینکه محور خنثی دقیقا از مرز مشترک عبور کند که هر دو تنش برابر با صفر گردد بنابر این داریم :



$$Q_1^{N.A} = Q_2^{N.A} \Rightarrow (n \times ۱۵) \times ۱۰ \times ۵ = (۲۰ \times ۱۵) \times ۱۰ \Rightarrow ۵n = ۲۰ \Rightarrow n = ۴$$

- دقت شود که با توجه به اینکه در صورت سوال ذکر شده مقطع مرکب لذا مقطع یکپارچه بوده است و گزینه ۴ صحیح است ، با فرض عدم اتصال در مقطع داریم :

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{(EI)_1}{\sum EI} M \\ M_2 &= \frac{(EI)_2}{\sum EI} M \end{aligned}\right\} \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2} \qquad \sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow M_1 \times \frac{۵}{I_1} = M_2 \times \frac{۱۰}{I_2} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = n = ۲$$

۴۹- با توجه به اطلاعات سوال ۴۸، نسبت E_1 به E_2 چقدر باشد تا در تراز فصل مشترک دو ماده $\tau_2 = \tau_1$ شود؟

۱) در فصل مشترک دو ماده، تنش‌های برشی همیشه برابرند و مستقل از E_1 و E_2 هستند.

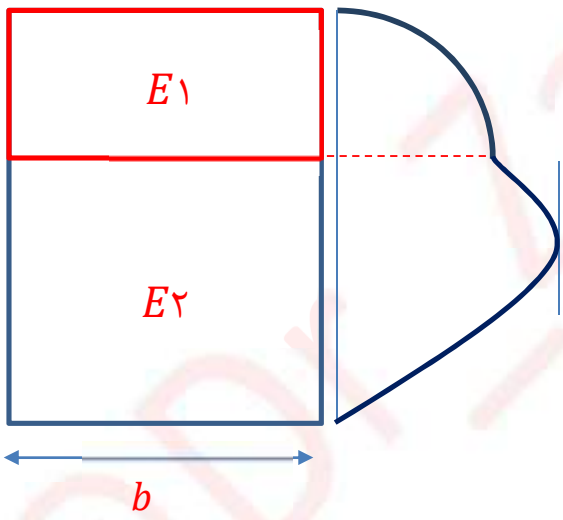
۲) در مقاطع مرکب، تنش‌های برشی وابسته به مدول برشی بوده و مستقل از E_1 و E_2 هستند.

۳) در فصل مشترک دو ماده، تنش‌های برشی به شرطی برابر می‌شوند که $E_1 = E_2$ باشد.

۴) در مقاطع مرکب، تحت هیچ شرایطی امکان تساوی تنش‌های برشی وجود ندارد.

پاسخ سوال ۴۹) **گزینه ۱ (ساده)**

توزیع شماتیک تنش برشی در مقطع مستطیلی غیر همگن



- در فصل مشترک دو قسمت که دارای پهنای یکسان می‌باشند تنش برشی یکسان است دقت شود که در رابطه $\tau = \frac{VQ}{Ib}$ می‌بایست پهنای واقعی قرار گیرد بنابر این تنش های برشی در مرز مشترک دو جنس یکسان می‌باشند مگر اینکه پهنای واقعی دو قسمت با هم برابر نباشند .

۵۰- از یک ورق نازک در حالت اول یک قوطی با مقطع مربع و در حالت دوم یک استوانه با مقطع دایره ساخته می‌شود. نسبت ظرفیت خمشی قوطی (خمش موازی ضلع آن است) به استوانه کدام است؟

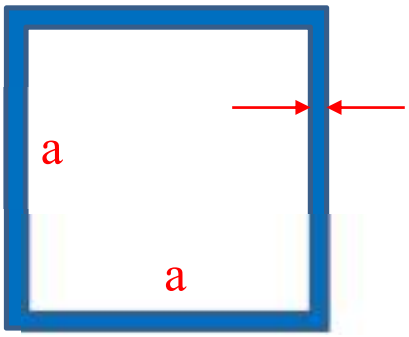
۱) $\frac{\pi}{۴}$

۲) $\frac{\pi}{۲}$

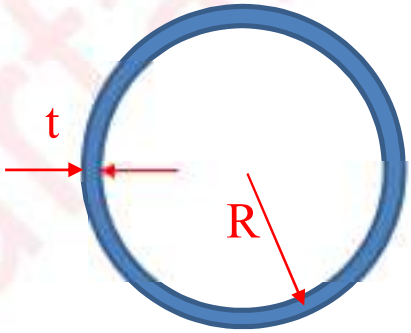
۳) $\frac{\pi}{۳}$

۴) $\frac{۲\pi}{۳}$

پاسخ سوال ۵۰) گزینه ۳ (ساده)



(قوطی)



(لوله)

$$S_{\text{قوطی}} = \frac{I}{C} = \frac{\frac{۲}{۳}a^۳t}{\frac{a}{۲}} = \frac{۴}{۳}a^۲t$$

$$S_{\text{لوله}} = \frac{I}{C} = \frac{\pi R^۳ t}{R} = \pi R^۲ t$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{قوطی}}}{S_{\text{لوله}}} = \frac{۴}{۳\pi}\left(\frac{a}{R}\right)^۲$$

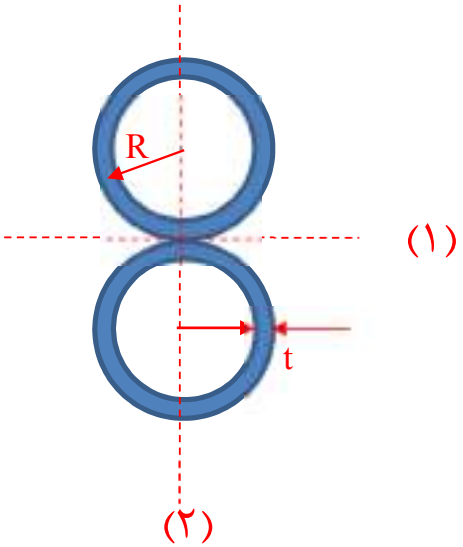
از طرفی با توجه به برابر بودن محیط و ضخامت (مساحت) دو مقطع داریم :

$$۴at = ۲\pi Rt \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{قوطی}}}{S_{\text{لوله}}} = \frac{۴}{۳\pi}\left(\frac{a}{R}\right)^۲ = \frac{۴}{۳\pi} \times \left(\frac{\pi}{۲}\right)^۲ = \frac{\pi}{۳}$$

۵۱- از دو لوله جدار نازک یکسان که به‌طور طولی به یکدیگر جوش شده‌اند (به‌صورت 8) به عنوان تیر استفاده خواهد شد. نسبت اساس مقطع الاستیک تیر حاصل حول محور مماس مشترک دو دایره به اساس مقطع الاستیک حول محور گذشته از مرکز دو لوله (دایره) چقدر است؟

۱) ۱/۲۵
۲) ۱/۵
۳) ۲
۴) $\frac{\pi}{۲}$



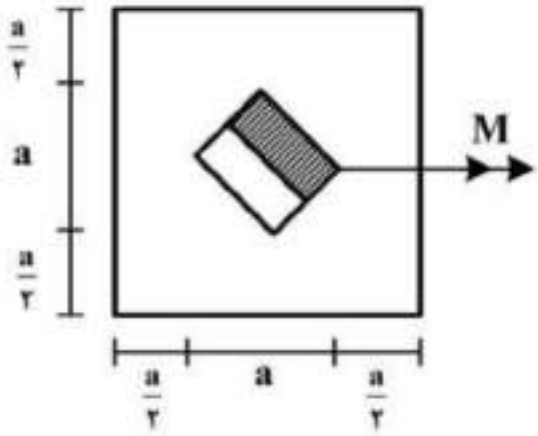
پاسخ سوال ۵۱) گزینه ۲ (ساده)

$$S_۱ = \frac{I_۱}{C_۱} = \frac{۲ \times (\pi R^۳ t + ۲\pi R t \times R^۲)}{۲R} = ۳\pi R^۲ t$$

$$S_۲ = \frac{I_۲}{C_۲} = \frac{۲\pi R^۳ t}{R} = ۲\pi R^۲ t$$

$$\Rightarrow \frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۳\pi R^۲ t}{۲\pi R^۲ t} = ۱.۵$$

۵۲- با توجه به مقطع مطابق شکل، نیروی اعمال شده به قسمت هاشور خورده ناشی از لنگر خمشی M چه ضریبی از $\frac{M}{a}$ است؟



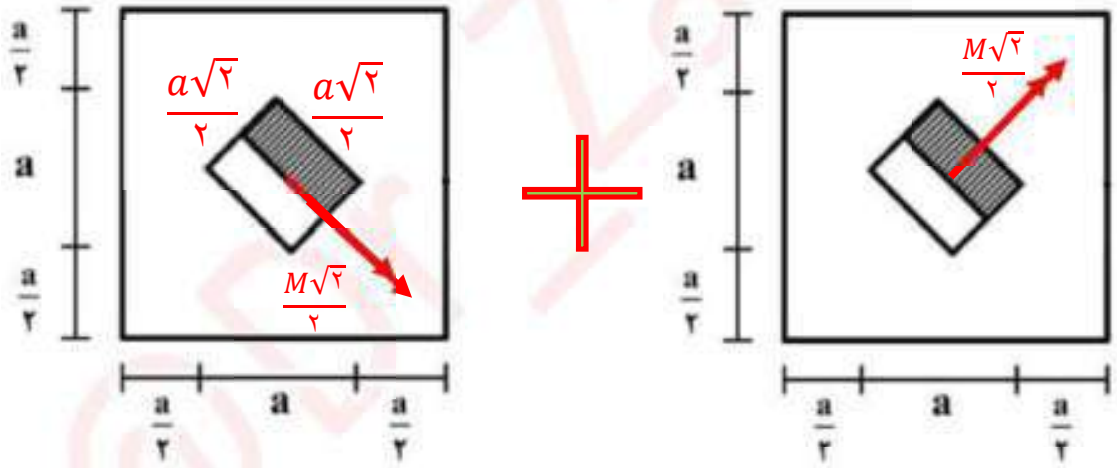
۱) $\frac{۱}{۳۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۳۲}$

۳) $\frac{۳}{۱۲۸}$

۴) $\frac{۳\sqrt{۲}}{۱۲۸}$

پاسخ سوال ۵۲) گزینه ۳ (دشوار)



$$F_{\text{هاشور خورده}} = o$$

$$I_{\text{کل}} = \frac{(۲a)^۴}{۱۲}$$

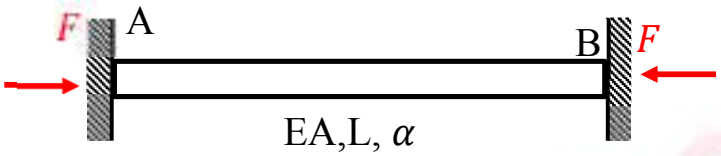
$$Q_{\text{هاشور خورده}} = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}a \times \frac{\sqrt{۲}}{۲}a\right) \times \frac{\sqrt{۲}}{۸}a = \frac{\sqrt{۲}}{۳۲}a^۳$$

$$F_{\text{هاشور خورده}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}M\right) \times Q_{\text{هاشور خورده}}}{I_{\text{کل}}} = \frac{۳}{۱۲۸}\frac{M}{a}$$

۵۳- دمای یک میله دو سرگیردار AB (A سمت چپ) با سطح مقطع ثابت A، طول L، مدول ارتجاعی E و ضریب انبساط حرارتی α به‌طور یکنواخت از T_A در A تا T_B در B تغییر می‌کند، به‌طوری که در هر نقطه نیر به فاصله x از تکیه‌گاه A، رابطه $T = T_A + x(T_B - T_A)/L$ برقرار است. نیرویی که میله بر تکیه‌گاه‌های صلب A و B وارد می‌کند، کدام است؟ (در ابتدا نیروی محوری در میله وجود ندارد و دمای آن T_A است)

۱) $\frac{\alpha EA}{۲}(T_B - T_A)$
۲) $\alpha EA(T_B - ۲T_A)$
۳) $\alpha EA(۲T_B - T_A)$
۴) $۲\alpha EA(T_B - T_A)$

پاسخ سوال ۵۳) گزینه ۱ (ساده)



$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)x}{L}$$

$$\Delta_{AB} = o \Longrightarrow \int_o^L \alpha \Delta T(x)dx - \frac{FL}{EA} = o$$

$$\Delta T(x) = T(x) - T_A = \frac{(T_B - T_A)x}{L}$$

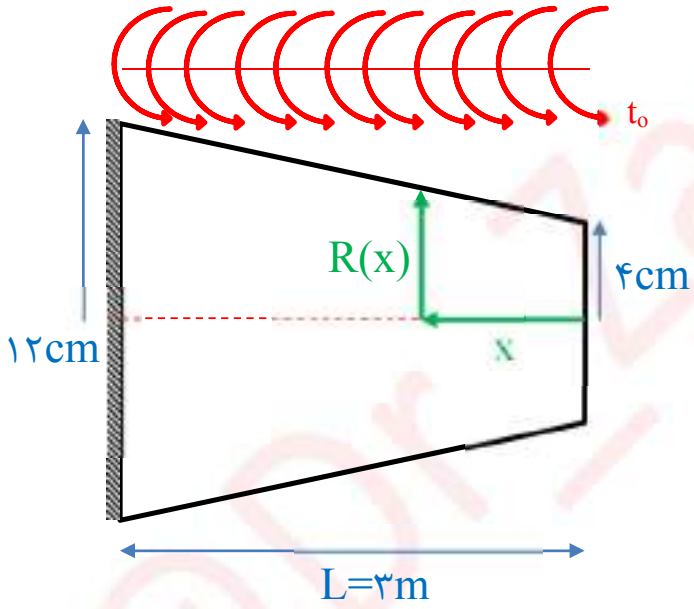
$$\Longrightarrow \int_o^L \alpha \frac{(T_B - T_A)x}{L}dx - \frac{FL}{EA} = o \Longrightarrow \alpha \frac{(T_B - T_A)L}{۲} = \frac{FL}{EA}$$

$$\Longrightarrow F = \frac{۱}{۲}\alpha EA(T_B - T_A)$$

۵۴- یک مخروط ناقص توپر افقی طره‌ای به طول ۳m که شعاع مقطع آن در انتهای آزاد برابر ۴cm و در تکیه‌گاه برابر ۱۲cm است، در طول محور خود تحت اثر لنگر پیچشی گسترده یکنواخت با شدت t_0 قرار دارد. اگر تنش برشی مجاز مصالح برابر با ۱۰۰MPa باشد، حداکثر مقدار t_0 برحسب kN.m / m کدام است؟

۱) ۷/۲π
۲) ۱۴/۴π
۳) ۲۸/۸π
۴) ۵۷/۶π

پاسخ سوال ۵۴) گزینه ۲ (متوسط)



$$J(x)=\frac{\pi R^{۴}(x)}{۲}$$

$$T(x)=t_{.}\times x$$

$$R(x)=۴+\frac{۸x}{L}$$

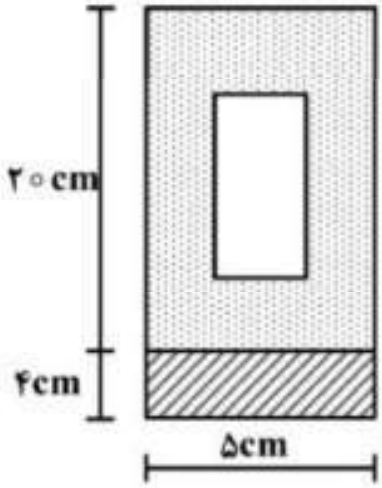
$$\tau(x)=\frac{T(x)R(x)}{J(x)}$$

$$\tau(x)=\frac{t_{.}\times x}{\frac{\pi R^{۴}(x)}{۲}}=\frac{۲t_{.}}{\pi}\times\frac{x}{\left(۴+\frac{۸x}{۳}\right)^{۳}}\xrightarrow{\tau_{max}}\frac{d\tau(x)}{dx}=o\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}m$$

$$\tau_{max}=\frac{۲t_{.}}{\pi}\times\frac{\frac{۳}{۴}}{\left(۴+\frac{۸\left(\frac{۳}{۴}\right)}{۳}\right)^{۳}}\leq ۱۰۰۰\frac{kg}{cm^{۲}}\Rightarrow t_{.}\leq ۱۴۴۰\pi\frac{kg.cm}{cm}=۱۴.۴\pi\frac{kN.m}{m}$$

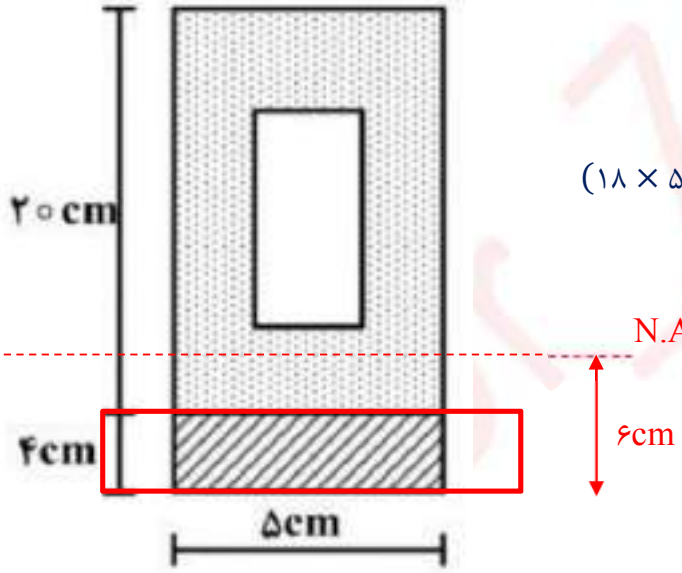
۵۵- مقطع مرکب مطابق شکل از دو ماده مختلف با مدول ارتجاعی E_1 و E_2 تشکیل یافته است. مقطع اول در وسط خود دارای حفره‌ای مستطیل شکل به ابعاد ۱۰×۲ سانتی‌متر است. نسبت E_2 به E_1 کدام باشد تا فاصله تار خنثی از تراز پائینی مقطع برابر ۶cm شود؟

۱) ۱۰
۲) ۹/۲۵
۳) ۸
۴) ۷/۲۵



پاسخ سوال ۵۵) گزینه ۳ (متوسط)

- روش اول : محاسبه ممان استاتیک بالا و پایین مقطع معادل



$$Q^{N.A}_{\text{بالا}} = Q^{N.A}_{\text{پایین}}$$

$$(۱۸ \times ۵) \times ۹ - (۱۰ \times ۲) \times ۸ = (۲ \times ۵) \times ۱ + (n \times ۵ \times ۴) \times ۴$$

$$\Longrightarrow n = ۸$$

- روش دوم : محاسبه مرکز سطح مقطع معادل:

$$\bar{y} = ۶cm = \frac{(۵n \times ۴) \times ۲ + (۲۰ \times ۵) \times ۱۴ - (۱۰ \times ۲) \times ۱۴}{(۵n \times ۴) + (۲۰ \times ۵ - ۱۰ \times ۲)}$$

$$\Longrightarrow n = ۸$$